Exercice 1 (ROC)

Soit a , b et c trois éléments de $\mathbb{Z}^*$, si b/a , si c/a et si PGCD(b, c) = 1, alors bc/a .

Exercice 2

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On considère a et b deux entiers relatifs quelconques, n et p deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Affirmation : $a \equiv b[p] \Leftrightarrow na \equiv nb[p]$

2. Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Affirmation : s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 3$, alors PGCD(a, b) = 3 .

3. Soit n un entier naturel congru à 1 modulo 7.
Affirmation : PGCD(4n + 3, 3n + 4) = 7

4. On considère l'équation (E) : $x^2 - 52x + 480 = 0$.
Affirmation : il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont les solutions de (E).

Exercice 3

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \quad [17] \\ n \equiv 3 \quad [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
On désigne par $(u\,;\,v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;\,v)$.

b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$.

a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.