Exercice 1

En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

Exercice 2

a et b sont deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que PGCD(a, 19) = 1 ou 19.
2. Montrer que : $ab \equiv 0[19] \Leftrightarrow a \equiv 0[19]$ ou $b \equiv 0[19]$.
3. En déduire que : $a^2 \equiv 4[19] \Leftrightarrow a \equiv 2[19]$ ou $a \equiv -2[19]$

Exercice 3

Soit n un entier relatif, on considère le système : (S) $\begin{cases} n \equiv 5[13] \\ n \equiv 1[17] \end{cases}$.

1. Montrer que 18 est solution de (S).
2. Montrer que :

$$\begin{cases} n \equiv 5[13] \\ n \equiv 1[17] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 18[13] \\ n \equiv 18[17] \end{cases}$$

En déduire que si n est solution de (S), alors $n-18$ est divisible par 221.

3. Montrer que si $n \equiv 18[221]$, alors n est solution de (S).

Exercice 4

On note E l'équation $7x-11y=-5$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs solution de l'équation E.

b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation E.