Exercice 1
Voir cours

Exercice 2

a et b sont deux entiers naturels non nuls.
1. 19 est un nombre premier, donc PDCD(a, 19) = 19 si 19/a, sinon PGCD(a, 19) = 1.
2. Si $a \equiv 0[19]$ ou $b \equiv 0[19]$, alors, de façon évidente, $ab \equiv 0[19]$.

Réciproquement : si 19 divise ab, alors soit 19 divise a, soit PGCD(a, 19) = 1 et alors, par le théorème de Gauss, 19 divise b.
3. En utilisant la question 2, on a :
$a^2 \equiv 4[19] \Leftrightarrow (a-2)(a+2) \equiv 0[19] \Leftrightarrow a-2 \equiv 0[19]$ ou $a+2 \equiv 0[19] \Leftrightarrow a \equiv 2[19]$ ou $a \equiv -2[19]$.

Exercice 3

1. On a : $18 \equiv 5[13]$ et $18 \equiv 1[17]$, donc 18 est bien solution de (S).
2. D'après 1, $(S)\begin{cases} n \equiv 5[13] \\ n \equiv 1[17] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 18[13] \\ n \equiv 18[17] \end{cases}$.

Si n est solution de (S), alors 13 divise n - 18 et 17 divise n – 18, or PGCD(13,17) = 1, donc, par un théorème du cours, $13 \times 17 = 221$ divise n – 18, donc $n \equiv 18[221]$.

3. Réciproquement si $n \equiv 18[221]$, alors il est immédiat que $n \equiv 18[13]$ et $n \equiv 18[17]$, donc n est solution de (S).

Exercice 4

On note E l'équation $7x - 11y = -5$ où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminons un couple d'entiers relatifs solution de l'équation E.

$11 = 7 \times 1 + 4$
$7 = 4 \times 1 + 3$
$4 = 3 \times 1 + 1$

	1	0
	0	1
1	1	-1
1	-1	2
1	2	-3

Ainsi $11 \times 2 + 7 \times (-3) = 1$, d'où $7 \times 15 - 11 \times 10 = -5$.
(15, 10) est une solution particulière de E.

b) Déterminons tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation E.
Pour tous x et y appartenant à $\mathbb{Z}$, on a :
$7x - 11y = -5 \Leftrightarrow 7x - 11y = 7 \times 15 - 11 \times 10 \Leftrightarrow 7(x-15) = 11(y-10)$ (1).
11/7(x-15) et PGCD(7, 11) = 1, donc, par le théorème de Gauss, 11/(x-15); il existe donc k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $x - 15 = 11k$; d'où, en remplaçant dans (1), $y - 10 = 7k$.
Les couples solutions sont (15 + 11k, 10+7k) où $k \in \mathbb{Z}$.