Terminale S5

Exercice 1 Restitution organisée de connaissances

1. On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exp(\ln x) = x$.

A partir de ces arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Soit F la fonction définie et dérivable sur $]-1,1[$ telle que $F(0) = 0$ et $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

2. On pose, pour tout $x \in]-\pi, 0[$, $H(x) = F(\cos(x))$.

a) Calculer $H\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que H est dérivable sur $]-\pi, 0[$ et calculer H'(x).

c) En déduire que, pour tout x de $]-\pi, 0[$, $H(x) = x + \pi/2$.

d) Calculer $F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 3

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $\text{A}M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.
   a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que $\text{AP} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?