Exercice 1

1. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ .Sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exp(\ln x) = x$, en appliquant la formule de dérivation d'une composée, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exp'(\ln x) \times \ln'(x) = 1$, soit $\exp(\ln x) \times \ln'(x) = 1$, d'où $x \times \ln'(x) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. La fonction ln est dérivable en 1, et sa dérivée vaut 1, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1$, soit $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$. En posant $h = x - 1$, on a aussi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln(1 + 1/n) = \dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on en déduit, par un théorème du cours, que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Exercice 2

Soit F la fonction telle que : F(0) = 0, F est dérivable sur $]-1,1[$ et $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ donc elle admet des primitives sur $]-1,1[$.
Parmi ces primitives une seule s'annule pour x = 0. Ce qui justifie l'existence et l'unicité de la fonction F.

2. On pose, pour tout $x \in]-\pi, 0[$, $H(x) = F(\cos x)$.

a) On a : $H(-\pi/2) = F(\cos(-\pi/2)) = F(0) = 0$.

b) La fonction cos est dérivable sur $]-\pi, 0[$ et à valeurs dans $]-1,1[$, la fonction F est dérivable sur $]-1,1[$, donc H est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in]-\pi, 0[$, on a : $H'(x) = F'(\cos x) \times (-\sin x) = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin x}{|\sin x|} = \dfrac{-\sin x}{-\sin x} = 1$.

c) Pour tout $x \in]-\pi, 0[$, on a : $H'(x) = 1$. On en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in]-\pi, 0[$, $H(x) = x + C$. Or $H(-\pi/2) = 0$, donc $C = \pi/2$.

d) On a : $F(\sqrt{3}/2) = F(\cos(-\pi/6)) = H(-\pi/6) = -\pi/6 + \pi/2 = \pi/3$.

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$. Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 2) = -2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite du cours), donc $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = -\infty$.

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	$\|\|$	$+$	
$u(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, au vu du tableau et d'après le corollaire du TVI, il existe α unique sur $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $u(\alpha)=0$.

b) $u(1,31)\approx -0,014$ et $u(1,32)\approx 0,02$, donc $1,31<\alpha<1,32$.

3.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4. On a : $u(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 2-\alpha^2$.

Partie B

Pour tout $x>0$, $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

1. Pour tout $x>0$, $f'(x)=2x+2(2-\ln x)\times\dfrac{-1}{x}=\dfrac{2(x^2-2+\ln x)}{x}=\dfrac{2u(x)}{x}$.

2. On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(2-\ln x)^2=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln x)^2=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Partie C

1. $x>0$, $M(x,\ \ln x)$, A(0, 2). On a : $AM^2=x^2+(\ln x-2)^2=f(x)$.

2. Pour $x>0$, on pose, $g(x)=\sqrt{f(x)}$. Notons que, pour $x>0$, $f(x)>0$.

a) Pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. On en déduit que f et g ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) D'après B2, la distance AM sera minimale pour $x=\alpha$, lorsque M = P où P est le point de coordonnées ($\alpha,\ln\alpha$).

c) D'après A4, $\ln\alpha=2-\alpha^2$, donc $AP^2=\alpha^2+(\ln\alpha-2)^2=\alpha^2+\alpha^4=\alpha^2(1+\alpha^2)$, soit $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. On a : A(0, 2), P($\alpha, 2-\alpha^2$), $\overrightarrow{AP}(\alpha,-\alpha^2)$. Un vecteur directeur de la tangente en P est $\vec{u}(1,1/\alpha)$. $\overrightarrow{AP}.\vec{u}=\alpha-\dfrac{\alpha^2}{\alpha}=0$, donc la droite (AP) est perpendiculaire à la tangente en P.