Terminale S4

Exercice1 (ROC)

On rappelle que, pour tout x, $e^x \geq x+1$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=e^x-xe^x+1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g et faire le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$.
   On donnera un encadrement de cette solution de largeur 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de g selon les valeurs de x.
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\frac{4x}{e^x+1}$.

a) Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x)$ a le même signe que g(x).
b) En déduire les variations de f. Faire le tableau de variations de f (on justifiera la limite en $+\infty$).

Exercice 3

Partie A : étude préliminaire d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée. En déduire les variations de g.
3. Prouver que la fonction g s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera a et b, avec a < b. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.
4. A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 0,01 des valeurs a et b.

Partie B : étude de la fonction f définie par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$.

1. Montrer que e^x-x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f ' de la fonction f, puis, à l'aide des résultats de la partie A, construire le tableau de variations de f.
4. Construire la courbe.