Exercice 1

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
2. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Soit $f(x) = xe^{x-1} + 1$ et *C* sa courbe représentative.

Partie A

1. Etudier la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour *C*.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$. En déduire les variations de f.

Partie B

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à *C* au point d'abscisse a qui passe par l'origine.

1. Donner une équation de T_a la tangente au point d'abscisse a.
2. Démontrer que T_a passe par l'origine si et seulement si : $1 - a^2e^{a-1} = 0$.
3. Démontrer que 1 est l'unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

Exercice 3

A. Soit $g(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'équation g(x) = 0 admet, sur $\mathbb{R}$, une solution unique α et que $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.
3. En déduire le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

B. Soit $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et *C* sa courbe représentative.

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.
   En déduire les variations de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Déterminer une équation de T, la tangente à *C* au point d'abscisse 0, et étudier les positions de *C* par rapport à T.
4. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
5. Calculer la limite de f en $+\infty$.
6. Démontrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à *C*.
   Etudier les positions de *C* par rapport à Δ.