Exercice 1. Voir cours

Exercice 2

Partie A

1. $f(x) = xe^{x-1} + 1 = xe^x \times e^{-1} + 1$, or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limite du cours), donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

2. $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout x , $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	1	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

Partie B

1. Une équation de T_a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$.

2. On a :

$$O \in T_a$$

$$\Leftrightarrow 0 = (a+1)e^{a-1}(0-a) + ae^{a-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - a^2e^{a-1}$$

3. Soit $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$, on a $g(1) = 0$.

Pour tout x , $g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = -e^{x-1}x(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
g'(x)	-	0	+	0	-
g(x)		$1 - 4e^{-3}$	1	0	

$1 - 4e^{-3} \approx 0,8$. Au vu du tableau, on :

$g(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et $g(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$.

La valeur 1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 3

A. Soit $g(x) = e^x + x + 1$.

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $g'(x) = e^x + 1 > 0$. g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} g = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty.$$

2. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$; au vu du tableau de variations et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $\mathbb{R}$ solution de $g(x) = 0$. De plus $g(-1,28) \approx -0,002$ et $g(-1,27) \approx 0,011$, donc $-1,28 < \alpha < -1,27$.

Plus précisément $\alpha \approx -1,2784645$.

3. Signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g(x)	-	0	+

B. Soit $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe représentative.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

2. On a $e^\alpha = -1 - \alpha$, d'où $f(\alpha) = \frac{\alpha(-1 - \alpha)}{-\alpha} = \alpha + 1$. On en déduit que : $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$.

3. Soit T la tangente à C au point d'abscisse 0. Une équation de T est : $y = \frac{1}{2}x$.

Pour tout x , $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x(e^x - 1) > 0$, on en déduit que la courbe est au-dessus de T , le seul point commun est O .

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limite du cours), on en déduit que $\lim_{-\infty} f = 0$.

5. Pour tout x , $f(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

6. Pour tout x , $f(x) - x = \frac{-x}{e^x + 1} = -\frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite du cours), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$.

Le signe de $f(x) - x$ est celui de $-x$. Il s'ensuit que C est strictement au-dessous de Δ sur $]0; +\infty[$, et strictement au-dessus sur $]-\infty; 0[$.