Exercice 1 (ROC)

1. Montrer que, pour tout x, $e^x > x$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Exercice 2

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)e^{-x}-1$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+x)e^{-x}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f.
3. a) Déterminer une équation de T tangente à C au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que $f(x) - x = x\, g(x)$.

c) Déterminer la position de C par rapport à T.

Exercice 3

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   - **a.** Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

     $$g(x) = x^2e^x - 1.$$

     Étudier le sens de variation de la fonction g.
   - **b.** Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a)=0$.

     Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.
   - **c.** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   - **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   - **b.** On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

     Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   - **c.** En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **d.** Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   - **e.** Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.