Exercice 1

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 2

Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD(a + b, ab) = p, où p est un nombre premier.

1. Démontrer que p divise a^2 (on remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).
2. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même, que p divise b.
3. Démontrer que PGCD(a, b) = p.

Exercice 3

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.