**Exercice 1.** Rappel : soit p un nombre premier, a $\in \mathbb{Z}^*$. On a : p/a ou pgcd (p,a) =1.
Soit p un nombre premier, a et b$\in \mathbb{Z}^*$, et p divise ab.
Soit p divise a, soit p ne divise pas a, dans ce cas p est premier avec a, alors, par le théorème de Gauss, p divise b.

**Exercice 2.** On considère l'équation : $8x-5y=1$.
1. Le couple (2, 3) est une solution évidente de cette équation.
2. On a :
$8x-5y=1$
$\Leftrightarrow 8x-5y=8(2)-5(3)$
$\Leftrightarrow 8(x-2)=5(y-3) \qquad (1)$
5 divise 8(x - 2) et PGCD( 5 , 8) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise x - 2 ; il existe donc $k \in Z$ tel que x -2 = 5k. Il vient alors, en remplaçant dans (1), $8\times 5k=5(y-3)$, soit y - 3 = 8k.
Les solutions sont donc :
$$\begin{cases} x=2+5k \\ y=3+8k, k\in Z \end{cases}$$
3. Un nombre entier positif n, divisé par 8, donne un reste 1. Ce même nombre divisé par 5, donne un reste 2. On cherche n tel que : $n\equiv 1[8]$ et $n\equiv 2[5]$.
On cherche donc q et q' tels que $n=1+8q=2+5q'$.
Ce qui nous amène à résoudre l'équation : $8q-5q'=1$.
D'après la question 2, les solutions sont $q=2+5k$ et $q'=3+8k$ où $k\in\mathbb{N}$.
De là, on en déduit que $n=1+8(2+5k)=17+40k$ où $k\in\mathbb{N}$.

**Exercice 3.** On cherche tous les couples (a, b) d'entiers naturels, avec a < b, tels que :
$$\begin{cases} PGCD(a,b)=6 \\ ab=2700 \end{cases} \qquad (1)$$
Posons D = PGCD(a, b), on a : a = Da', b = Db' avec PGCD(a', b') = 1. On a alors :
$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} D=6 \\ D^2a'b'=2700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=6 \\ a'b'=75=3\times 5^2 \end{cases}$$
a' = 1, b' = 75, a = 6 et b = 450
ou a' = 3, b' = 25, a = 18 et b = 150
$S=\{(6,450),(18,150)\}$
On a : PDCD(a,b)$\times$PPCM(a,b) = ab, donc PPCM(a,b) = $\dfrac{2700}{6}=450$.

**Exercice 4.** Soit n = 200 = $2^3\times 5^2$.
1. d'après le cours, $N=(3+1)\times(2+1)=12$.
2. 1, 2, $2^2$, 5, $2^3$, $2\times5$, $2^2\times5$, $5^2$, $2^3\times5$, $2\times5^2$, $2^2\times5^2$, $2^3\times5^2$
3. Soit p le produit de tous ces diviseurs.
On a : $p=2^{18}\times 5^{12}$, d'où $p^2=2^{36}\times5^{24}=(2^3\times5^2)^{12}=n^N$.

Le résultat se généralise à un entier $n\geq 2$ quelconque.
Soit $d_1$, $d_2$, ..., $d_N$ la liste des diviseurs de n dans l'ordre croissant.
On a alors : $p^2=(d_1d_2...d_N)^2=(d_1d_N)(d_2d_{N-1})...(d_Nd_1)=n^N$ car $d_1d_N=d_2d_{N-1}=...=n$.