Exercice 1

1. Montrer que 503 est un nombre premier.
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 2012.
3. Combien 2012 a-t-il de diviseurs positifs ?
4. Combien 2012^{2012} a-t-il de diviseurs positifs ?
5. Déterminer les diviseurs de 2012^{2012} compris entre 500 et 1000.

Exercice 2

Partie A

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation

$$\text{(E)}\ :\quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$.

3. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie B

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?