

Exercice 1

1. $\sqrt{503} \approx 22,43$, 503 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19, donc 503 est premier.
2. $2012 = 2 \times 1006 = 2^2 \times 503$.
3. 2012 a donc $(2+1) \times (1+1) = 6$ diviseurs.
4. La décomposition primaire de 2012^{2012} est $(2^2 \times 503)^{2012} = 2^{4024} \times 503^{2012}$.
Le nombre de diviseurs est donné par $(4024+1) \times (2012+1) = 8102325$.
5. Les diviseurs compris entre 500 et 1000 sont : 503 et $2^9 = 512$.

Exercice 2

Partie A

1. a. Tableau des restes modulo 9 :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X ²	0	1	4	0	7	7	0	4	1

- b. $250507 = 9 \times 27834 + 1$, donc $250507 \equiv 1[9]$.

D'après le tableau précédent, les restes possibles modulo 9 de b^2 sont 0, 1, 4 et 7.

Donc les restes possibles de a^2 sont 1, 2, 5 et 8, or, d'après le tableau seule la valeur 1 est possible.

- c. Si $a^2 \equiv 1[9]$, alors les restes possibles modulo 9 de a sont, toujours d'après le tableau, 1 et 8.

2. Si (a, b) vérifie (E), alors $a^2 \geq 250507$, soit $a \geq \sqrt{250507} > 500$, d'où $a \geq 501$.

$501^2 - 250507 = 494$ qui n'est pas le carré d'un entier, donc il n'y a pas de solution du type (501, b).

3. On suppose que (a, b) vérifie (E)

- a. Alors, d'après 1c, $a \equiv 1[9]$ ou $a \equiv 8[9]$, or $505 \equiv 1[9]$ et $503 \equiv 8[9]$, d'où le résultat.

- b. On a :

$$(505 + 9k)^2 - 250507 = b^2$$

$$\Leftrightarrow 255025 + 81k^2 + 9090k - 250507 = b^2$$

$$\Leftrightarrow 4518 + 81k^2 + 9090k = b^2$$

Pour $k = 0$, 4518 n'est pas un carré.

Pour $k = 1$, $4518 + 81 + 9090 = 13689 = 117^2$.

Le couple (514, 117) est solution.

Partie B

1. D'après 3b, $250507 = 514^2 - 117^2 = (514 + 117)(514 - 117) = 631 \times 397$.

2. $\sqrt{631} \approx 25,12$, 631 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23, donc 631 est premier.

On vérifie de même que 397 est premier. Ces deux nombres premiers sont aussi premiers entre eux.

3. A partir de cette décomposition primaire de 250507, qui est unique à l'ordre près des facteurs, les possibilités d'écrire 250507 comme produit de 2 facteurs, à l'ordre près, sont :

1×250507 et 397×631 .