Exercice 1

Pour chacune des 3 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une démonstration de la réponse choisie.

Proposition 1 : $5^{570} - 1$ est un multiple de 7.

Proposition 2 : si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7, alors PGCD(3n + 4, 4n + 3) = 7.

Proposition 3 : s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que au + bv = 2, alors PGCD(a, b) = 2.

Exercice 2

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

   a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
      Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
   b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
      Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
   c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
      En déduire que N_p est divisible par N_k.
4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
   Cette condition est-elle suffisante ?