

Exercice 1

Proposition 1 : vraie

$$5^2 \equiv 4[7], 5^3 \equiv -1[7], \text{ donc } 5^6 \equiv 1[7].$$

Or $570 = 6 \times 95$, d'où $5^{570} = (5^6)^{95} \equiv 1[7]$.

Proposition 2 : vraie

On a :

$$4n + 3 = (3n + 4) \times 1 + n - 1$$

$$3n + 4 = (n - 1) \times 3 + 7$$

Il s'ensuit que $\text{PGCD}(4n + 3, 3n + 4) = \text{PGCD}(n - 1, 7)$.

Si $n - 1 \equiv 0[7]$, alors $\text{PGCD}(4n + 3, 3n + 4) = 7$.

Proposition 3 : fausse

$$3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2 \text{ et } \text{PGCD}(3, 4) = 1.$$

Exercice 2

1. $N_2 = 11$ est premier, $N_3 = 111 = 3 \times 37$ n'est pas premier, $N_4 = 1111 = 11 \times 101$ n'est pas premier.

2. Pour tout $p \geq 2$, on a : $N_p = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{p-1} = \frac{1-10^p}{1-10} = \frac{10^p - 1}{9}$.

$10^p - 1$ est divisible par 9 car N_p est un entier naturel.

3. a) On suppose que p est pair, $p = 2q$, où $q \geq 1$. On a alors :

$$N_p = \frac{10^{2q} - 1}{9} = \frac{100^q - 1}{9} = \frac{(100 - 1)(100^{q-1} + 100^{q-2} + \dots + 100 + 1)}{9} = 11(100^{q-1} + 100^{q-2} + \dots + 100 + 1)$$

Donc N_p est divisible par 11.

b) On suppose que p est un multiple de 3, $p = 3q$, où $q \geq 1$. On a alors :

$$N_p = \frac{10^{3q} - 1}{9} = \frac{1000^q - 1}{9} = \frac{(1000 - 1)(1000^{q-1} + 1000^{q-2} + \dots + 1000 + 1)}{9} \\ = 111(1000^{q-1} + 1000^{q-2} + \dots + 1000 + 1)$$

Donc N_p est divisible par 111.

c) On suppose que $p \geq 2$ n'est pas premier, $p = kq$, où k et q sont des entiers naturels ≥ 2 .

On a alors :

$$N_p = \frac{10^{kq} - 1}{9} = \frac{(10^k)^q - 1}{9} = \frac{(10^k - 1)(10^{k(q-1)} + 10^{k(q-2)} + \dots + 10^k + 1)}{9} \\ = N_k(10^{k(q-1)} + 10^{k(q-2)} + \dots + 10^k + 1)$$

Donc N_p est divisible par N_k , où $1 < N_k < N_p$.

4. D'après la question 3c, si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

p premier est une condition nécessaire pour que N_p soit premier.

La condition n'est pas suffisante : 3 est premier et N_3 ne l'est pas.