Terminale S5

Exercice 1

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1
On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i}, \quad b = 3\mathrm{i}, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation
Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2
On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}\right) z$.
Affirmation
La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Question 3
On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{2011}$.
Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Exercice 2

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   a. Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Exercice 3

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3i$ et $2-3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.
2. Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $1+i$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1-i}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

   b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?