Terminales S Samedi 8 décembre 2012

Devoir commun de mathématiques n°1 (2h)

Exercice 1

Un sondage a été effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage.
65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage. Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont écologistes.
Parmi les personnes favorables à la construction, 20% sont des écologistes.
On note C l'événement : « La personne interrogée est contre la construction. »
On note E l'événement : « La personne interrogée est écologiste. »
1. Déterminer les probabilités $p(C)$, $p_C(E)$ et $p_{\overline{C}}(E)$.
2. Déterminer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit écologiste.
3. Déterminer la probabilité qu'une personne soit contre la construction du barrage sachant qu'elle est écologiste.
4. On choisit au hasard et de façon indépendante cinq personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage. Quelle est la probabilité qu'au moins deux de ces cinq personnes ne soient pas écologistes ? »

Exercice 2

Partie A : Restitution de connaissance

L'objet de cette partie est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa fonction dérivée.
- $e^0=1$
- Pour tout réel x on a $e^x>x$
- Soient deux fonctions v et w définies sur un intervalle $[A;+\infty[$ avec A réel positif : Si pour tout x de $[A;+\infty[$ on a $v(x)\le w(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}w(x)=+\infty$

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.
   a. Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$
   b. Justifier que pour tout x de $[0;+\infty[$: $g(x)\ge 1$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\frac{1}{2}x\,e^{-\frac{1}{2}x}$

1. Etudier la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.

Exercice 3

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.
Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0

Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	    Affecter à d la valeur $0,5d^2$
	    Affecter à n la valeur $n+1$.

Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.