

Exercice 1

1. D'après l'énoncé $P(C) = 0,65$, $P_C(E) = 0,7$ et $P_{\bar{C}}(E) = 0,2$.
2. On a : $P(E) = P(C \cap E) + P(\bar{C} \cap E) = P(C) \times P_C(E) + P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(E)$ (formule des probabilités totales), d'où $P(E) = 0,65 \times 0,7 + 0,35 \times 0,2 = \frac{21}{40} = 0,525$.
3. On cherche $P_E(C)$. On a : $P_E(C) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{0,65 \times 0,7}{0,525} = \frac{13}{15} \approx 0,8667$.
4. On a donc un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes non écologistes suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,475.
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,525^5 - 5 \times 0,475 \times 0,525^4 \approx 0,7797$

Exercice 2

Partie A

1. a. La fonction g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - x$.
Or, pour tout x , $e^x > x$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
b. De plus $g(0) = e^0 = 1$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq 1$.
2. D'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq 0$, soit $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.

On en déduit que, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc, par un théorème de comparaison,

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x}$

1. Etude de la limite de f en $+\infty$

Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x} = X e^{-X} = \frac{X}{e^X}$, où $X = \frac{1}{2}x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ (partie A), on en déduit, par composition des limites, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Etude des variations de la fonction f

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} (2 - x) e^{-\frac{1}{2}x}$.

$f'(x)$ est du signe de $(2 - x)$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

Exercice 3

$u_0 = 3$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right)$ (1). On admet que, pour tout n , $u_n > 0$.

1. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right)$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{7}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 7}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})}{2x^2}$.

x	0	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

Ainsi, pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq \sqrt{7}$.

Donc, pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{7}$; or $u_0 = 3 \geq \sqrt{7}$, donc, pour tout n , $u_n \geq \sqrt{7}$.

2. a. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{u_n} - u_n \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7 - u_n^2}{u_n} \leq 0$ car $u_n \geq \sqrt{7}$.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{7}$, donc, par le théorème du cours, elle converge. Soit $\lim u_n = L$.

c. Par passage à la limite dans (1), on obtient $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{7}{L} \right)$, avec $L \geq \sqrt{7}$.

On a : $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{7}{L} \right) \Leftrightarrow 2L^2 = L^2 + 7 \Leftrightarrow L^2 = 7$, or $L \geq \sqrt{7}$, donc $L = \sqrt{7}$.

3. Pour tout n , $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n^2 - 2\sqrt{7}u_n + 7}{u_n} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$

4. $d_0 = 1$ et, pour tout n , $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2$.

a. Montrons, par récurrence, que, pour tout n , $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

$u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \leq 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Supposons, pour n quelconque, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$, alors

$$u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{d_n^2}{u_n} = \frac{d_{n+1}}{u_n} \leq d_{n+1} \quad \text{car } u_n \geq \sqrt{7} \geq 1.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

b. Algorithme

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p .
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. Affecter à d la valeur $0,5d^2$ Affecter à n la valeur $n + 1$.
Sortie :	Afficher n .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche la valeur 5.

On peut en déduire que $d_5 \leq 10^{-9}$, d'où $0 \leq u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \leq 10^{-9}$.

Ainsi u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.