Exercice 1

$\cos 2x = \sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi/2 - x)$

$\Leftrightarrow 2x = \pi/2 - x[2\pi]$ ou $2x = x - \pi/2[2\pi]$

$\Leftrightarrow 3x = \pi/2[2\pi]$ ou $x = -\pi/2[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \pi/6[2\pi/3]$

Pour tout x, $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

$f(x) = (2\cos x - \sqrt{3})(2\cos 2x - 1)$.

$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1/2 \Leftrightarrow 2x = \pm\pi/3[2\pi] \Leftrightarrow x = \pm\pi/6[\pi]$

$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3}/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/6[2\pi]$

x	0		$\pi/6$		$\pi/3$		$5\pi/6$		π
$2\cos 2x - 1$		+	0		-		0	+	
$2\cos x - \sqrt{3}$		+	0			-			
f(x)		+	0		+		0	-	

Sur l'intervalle $[0,\pi]$: $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [5\pi/6, \pi] \cup \{\pi/6\}$

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$.

Pour tout x, $f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi)\cos(2x+2\pi) = (-\sin x)^2 \cos 2x = f(x)$.

Pour tout x, $f(-x) = \sin^2(-x)\cos(-2x) = (-\sin x)^2 \cos 2x = f(x)$.

La fonction f est π-périodique paire; il suffit donc de faire l'étude de f sur l'intervalle $[0;\pi/2]$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel,

$f'(x) = 2\sin x \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \sin 2x$.

On a, pour tout x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \sin 2x \\ &= \sin 2x(\cos 2x - 2\sin^2 x) = \sin 2x(1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x) \\ &= \sin 2x(1 - 4\sin^2 x) \\ &= \sin 2x(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) \end{aligned}$$

3. On a :

$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0[\pi/2]$

$\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6[2\pi]$ ou $x = 5\pi/6[2\pi]$.

sur $[0,\pi/2]$, $1 + 2\sin x > 0$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
sin2x	0		+		0
1-2sinx		+	0	-	
f '(x)	0	+	0	-	0
f(x)	0	↗	1/8	↘	-1

Exercice 3

On pose, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F(\tan(x))$.

a) On a : H(0) = F(tan0) = F(0) = 0.

b) La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc H est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$H'(x) = F'(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \times (1 + \tan^2 x) = 1.$$

c) Soit, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = H(x) - x$, alors $g'(x) = 0$, on en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, g(x) = C. Or H(0) = 0, donc C = 0; d'où , pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

d) On a : $F(1) = F(\tan(\pi/4)) = H(\pi/4) = \pi/4$.