Exercice 1

Pour chacune des propositions indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $g(x)=2x\ln(2x+1)$.

Proposition1	Sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation $g(x)=2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.
Proposition2	Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.
Proposition3	$\ln\left(\sqrt{e^7}\right)+\frac{\ln\left(e^9\right)}{\ln\left(e^2\right)}=\frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}}$
Proposition4	L'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Rappel : Pour tout $x\in I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Soit F la fonction telle que : F(0) = 0, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

On pose, pour tout $x\in I$, $H(x)=F(\tan(x))$.

1. Calculer H(0).
2. Montrer que H est dérivable sur I et calculer H'(x).
3. En déduire que, pour tout $x\in I$, H(x) = x.
4. Montrer que F(1) = $\pi/4$.
5. Montrer que, pour tout $x\in[0,\ 1]$, $0\leq F(x)\leq \pi/4$

Exercice 3

On considère la fonction f(x) = $-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x+\frac{3}{2}$.

1. Montrer que f est 2π-périodique paire.

En déduire qu'il suffit de faire l'étude de f sur l'intervalle $[0,\ \pi]$.

2. Calculer f '(x) et montrer que, pour tout x, $f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$.
3. Faire le tableau de variations de f sur $[0,\ \pi]$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.