

Exercice 1

Proposition 1 fausse

Pour tout $x > -1/2$, on a :

$$g(x) = 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2x \ln(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } \ln(2x+1) = 1 = \ln e$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{e-1}{2}$$

Proposition 2 vraie

Pour $x > -1/2$, $g'(x) = 2 \ln(2x+1) + \frac{4x}{2x+1}$.

$$g'(1/2) = 2 \ln 2 + 1 = 1 + \ln 4.$$

Proposition 3 vraie

$$\ln(\sqrt{e^7}) = \frac{1}{2} \ln e^7 = \frac{7}{2}, \frac{\ln e^9}{\ln e^2} = \frac{9}{2}, \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8, \frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}} = \frac{e^{\ln 2 \times 3}}{e^{\ln 3/4}} = \frac{6}{3/4} = 8, \text{ d'où le résultat.}$$

Proposition 4 fausse

Pour tout $x > 1$, on a :

$$\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 4$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4x+8$$

$$\Leftrightarrow 3x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Mais cette valeur ne convient pas car elle n'appartient pas à $]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soit F la fonction telle que : $F(0) = 0$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On pose, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(\tan(x))$.

1. On a : $H(0) = F(\tan 0) = F(0) = 0$.

2. La fonction $\tan$ est dérivable sur I et F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc H est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in I$, on a :

$$H'(x) = F'(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \times (1 + \tan^2 x) = 1.$$

3. On en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \in I$, $H(x) = x + C$.

Or $H(0) = 0$, donc $C = 0$.

4. On a : $F(1) = F(\tan(\pi/4)) = H(\pi/4) = \pi/4$.

5. Pour tout x , $F'(x) > 0$, F est donc strictement croissante, $F(0) = 0$ et $F(1) = \pi/4$, d'où le résultat.

Exercice 3. On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$.

1. Pour tout x , $f(x+2\pi) = -\frac{1}{2} \cos(2x+4\pi) + \cos(x+2\pi) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2} = f(x)$, donc f est une fonction 2π -périodique.

Pour tout x , $f(-x) = -\frac{1}{2} \cos(-2x) + \cos(-x) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2} = f(x)$, donc f est une fonction paire.

Il suffit de faire l'étude de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2. On a, pour tout x ,

$$f'(x) = \sin 2x - \sin x = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1)$$

3. Tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0[\pi], \quad 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

x	0	$\pi/3$	π
$\sin x$	0	+	0
$2\cos x - 1$		+	0
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	2	$9/4$	0

Exercice 4

1. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (limite du cours), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite du cours), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, or $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$, de là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$; il en

résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.

2. a. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2(1 + \ln x)}{x^3} = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

b. Pour tout $x > 0$, on a :

$$-1 - 2 \ln x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x < -1/2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < e^{-1/2}$$

$f'(x)$ est du signe $-1 - 2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
		-	

c. Tableau de variations

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
		-	
$f(x)$		$e/2$	0
	$-\infty$		

$$f(e^{-1/2}) = \frac{1 - 1/2}{e^{-1}} = \frac{e}{2}.$$