Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connu le résultat suivant :
Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points tels que A est distinct de B et A′ est distinct de B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 2,\ z_{\mathrm{C}} = 4 + 6\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{E}} = -3 + 3\mathrm{i}.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$.
   - **a.** Donner l'écriture complexe de f.
   - **b.** Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.
   - **c.** Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.
   - **d.** En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].
   On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).
   - **a.** Déterminer l'image de M par la similitude f.
   - **b.** En déduire la nature du triangle ΩMN.
   - **c.** Montrer que $M\mathrm{B} \times N\mathrm{E} = M\mathrm{C} \times N\mathrm{A}$.