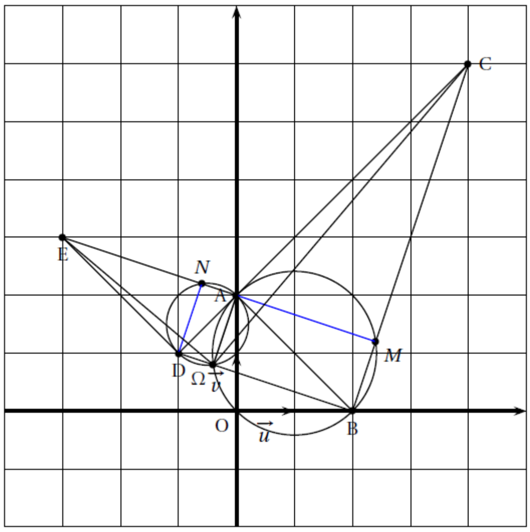
Partie A : voir cours

Partie B

1. Figure



2. On a : $\overrightarrow{AB}(2,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4,4)$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$. Le triangle ABC est rectangle en A.

3. a. $A \neq B$ et $D \neq A$, donc, d'après le théorème du cours, il existe une similitude directe f unique telle que f(A) = D et f(B) = A.

La forme complexe de f est : $z'=az+b$. On a :

$$\begin{cases} f(A)=D \\ f(B)=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+i=a(2i)+b \\ 2i=a(2)+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a+2i \\ 2a(1-i)=i+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1+i}{2(1-i)}=\dfrac{1}{2}i \\ b=i \end{cases}$$

La forme complexe de f est : $z'=\frac{1}{2}iz+i$.

b. $\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$. f est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit $\Omega(\omega)$ le centre de f, on a :

$$f(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2}i\omega+i \Leftrightarrow 2\omega=i\omega+2i \Leftrightarrow \omega=\frac{2i}{2-i}=\frac{-2+4i}{5}.$$

Conclusion : $f=S(\Omega(-2/5,4/5),1/2,\pi/2)$

c. On a : $z_{C'}=\frac{1}{2}i(4+6i)+i=-3+3i=z_E$. $f(A)=D$, $f(B)=A$ et $f(C)=E$, donc l'image du triangle ABC est le triangle DAE.

d. Le triangle ABC est rectangle en A et direct, donc, par conservation des angles orientés, le triangle DAE est rectangle en D et direct.

4. Γ_1 est le cercle de diamètre [AB] et Γ_2 est le cercle de diamètre [AD].

M est le second point d'intersection de Γ_1 et (BC).

N est le second point d'intersection de Γ_2 et (AE).

a. On a : $f(A)=D$, $f(B)=A$, donc $f([AB])=[AD]$, d'où $f(\Gamma_1)=\Gamma_2$.

De plus f(BC)=(AE), donc f(M) appartient à $\Gamma_2 \cap (AE)$. On en déduit que f(M) = N car $f(M) \neq A$.

b. $f(\Omega)=\Omega$ et $f(M)=N$, donc $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega N})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le triangle ΩMN est rectangle en Ω.

c. On a : $f(M)=N$, $f(B)=A$ et $f(C)=E$, d'où, par conservation du rapport des distances, $\frac{MB}{MC}=\frac{NA}{NE}$, soit $MB \times NE = MC \times NA$.