Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit le système : $\begin{cases} x + 2y + z = 42 \\ 2x + 3y + 4z = -6 \\ 3x + 4y + z = 24 \end{cases}$

Donner l'écriture matricielle $AU = V$ du système.

Soit $B = \frac{1}{6} A$, calculer l'inverse de B à la calculatrice. En déduire l'inverse de A.

Calculer la solution du système.

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2.
2. Trouver deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI$.
3. En déduire que $M(3I - M) = 2I$.

En déduire que M est inversible et déterminer sa matrice inverse.

Exercice 4

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe à chaque étape du sommet A au sommet B avec une probabilité 0,9 et du sommet B au sommet A avec une probabilité 0,7.

Soit $X_n = (x_n \ y_n)$ la matrice ligne état de la marche aléatoire donnant les probabilités d'arrivée respectives en A et B après n étapes.

1. Ecrire la matrice T de transition associée à la marche aléatoire.
2. Montrer, à l'aide d'un arbre, que, pour tout n, $X_{n+1} = X_n T$.
3. Si le départ a lieu en A, donner la probabilité d'être en B après 4 étapes.
4. Si le départ a lieu en B, donner la probabilité d'être en B après 5 étapes.