Exercice 1

Montrons, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La propriété est vraie pour n = 1. En effet : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1(1+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 1+n+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

L'écriture matricielle $AU = V$ du système est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}$, à la calculatrice $B^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$A = 6B$, donc $A^{-1} = \dfrac{1}{6}B^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}V = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 42 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73 \\ 64 \\ -13 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $3M-2I=\begin{pmatrix}0&3&-3\\-9&12&-9\\-3&3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-9&10&-9\\-3&3&-2\end{pmatrix}=M^2$.

3. On en déduit que $3M-M^2=2I$, soit $M(3I-M)=2I$.

Il existe donc une matrice $B=\frac{1}{2}(3I-M)$ telle que MB = I, ainsi M est inversible et sa matrice inverse est $M^{-1}=\frac{1}{2}(3I-M)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&1\\3&-1&3\\1&-1&3\end{pmatrix}$.

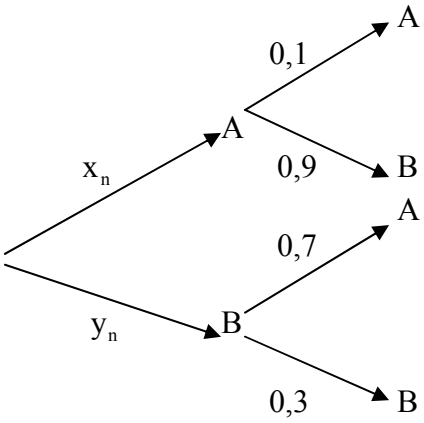
Exercice 4

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe à chaque étape du sommet A au sommet B avec une probabilité 0,9 et du sommet B au sommet A avec une probabilité 0,7.

Soit $X_n=(x_n \quad y_n)$ la matrice ligne état de la marche aléatoire donnant les probabilités d'arrivée respectives en A et B après n étapes.

1. La matrice T de transition associée à la marche aléatoire est $\begin{pmatrix}0,1&0,9\\0,7&0,3\end{pmatrix}$.

2. Montrons, à l'aide d'un arbre, que, pour tout n, $X_{n+1}=X_nT$.



Ainsi :

$$\begin{cases}x_{n+1}=0,1x_n+0,7y_n\\y_{n+1}=0,9x_n+0,3y_n\end{cases}$$

Soit $X_{n+1}=X_nT$, et pour tout n, $X_n=X_0T^n$.

3. Si le départ a lieu en A, $X_0=(1 \quad 0)$ et $X^4=X_0T^4=(0,5104 \quad 0,4896)$.

La probabilité d'être en B après 4 étapes est 0,4896.

4. Si le départ a lieu en B, $X_0=(0 \quad 1)$ et $X^5=X_0T^5=(0,47152 \quad 0,52848)$

La probabilité d'être en B après 5 étapes est 0,52848.