Exercice 1

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} &= 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} &= 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.
   b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.
2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
   b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
   c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 \quad + 0,3 \quad \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
   b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

Exercice 2

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe à chaque étape du sommet A au sommet B avec une probabilité 0,8 et du sommet B au sommet A avec une probabilité 0,4.

Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne état de la marche aléatoire donnant les probabilités d'arrivée respectives en A et B après n étapes.

1. Ecrire la matrice T de transition associée à la marche aléatoire.
2. Montrer, à l'aide d'un arbre, que, pour tout n, $X_{n+1} = X_n T$.
3. Si le départ a lieu en A, donner la probabilité d'être en A après 4 étapes.