Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$.

1. Pour tout x, $f(x+2\pi) = -\frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) + \cos(x+2\pi) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2} = f(x)$, donc f est une fonction 2π-périodique.

Pour tout x, $f(-x) = -\frac{1}{2}\cos(-2x) + \cos(-x) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2} = f(x)$, donc f est une fonction paire.

Il suffit de faire l'étude de f sur l'intervalle $[0,\ \pi]$.

2. On a, pour tout x,

$f'(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

3. Tableau de variations de f sur $[0,\ \pi]$.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0[\pi],\ 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

x	0		$\pi/3$		π
sinx	0		+		0
2cosx-1		+	0	-	
f '(x)	0	+	0	-	0
f(x)	2	↗	9/4	↘	0

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5\ln(1+x^2) + 4x$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2) = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$, d'où, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$f(x) = 5\ln(1+x^2) + 4x = \ln(1+x^2)^5 + \ln e^{4x} = \ln\left(e^{4x}(1+x^2)^5\right) = \ln\left(e^{4x}x^{10}(1+1/x^2)^5\right)$.

$e^{4x}x^{10} = e^{3x}(e^x x^{10})$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^{10} = 0$ (limite du cours), d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x}x^{10} = 0^+$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x}x^{10}\left(1+1/x^2\right)^5 = 0^+$, or $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

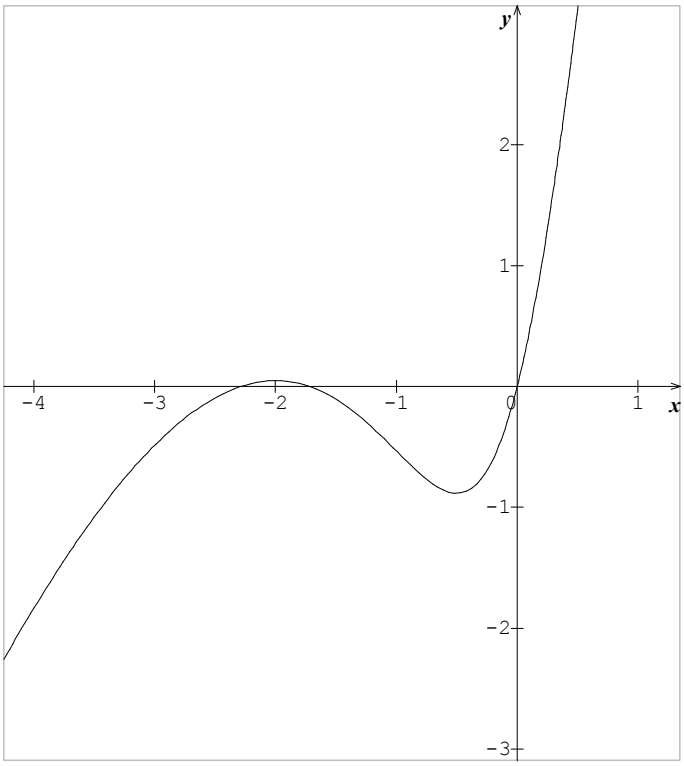
3. Pour tout x, $f'(x) = \frac{10x}{1+x^2} + 4 = 2\frac{2x^2+5x+2}{1+x^2} = 4\frac{(x+2)(x+1/2)}{1+x^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x+1/2)$.

x	$-\infty$		-2		-1/2		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	

4. Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		-1/2		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	5ln5-8	↘	5ln(5/4)-2	↗	$+\infty$



Exercice 3

1. $z_{D'} = \dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i} = \dfrac{i(-1+2i)}{1-2i} = -i$.

2. Pour tout $z \neq i$, on a :

$z' = 2i \Leftrightarrow \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} = 2i \Leftrightarrow iz - 2i - 3 = 2iz + 2 \Leftrightarrow iz = -5 - 2i \Leftrightarrow z = -2 + 5i$.

E est le point d'affixe $-2+5i$. On a : $\overrightarrow{BE}(-2+4i)$ et $\overrightarrow{AB}(-2+4i)$, B = m[AE].

3. Pour tout $M(z) \neq B$, on a :

$$OM' = \frac{|i(z-z_A)|}{|z-z_B|} = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

4. Pour tout $M(z) \neq A$ et B, on a :

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) &= \arg z'[2\pi] \\ &= \arg \frac{i(z-z_A)}{z-z_B}[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)[2\pi]\end{aligned}$$

5. Si $AM = BM$, alors,d'après 3, $OM' = 1$, donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

6. Pour tout $M(z) \neq B$, on a :

$$\begin{aligned} z' \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z' = 0 \quad \text{ou} \quad \arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow M = A \quad \text{ou} \quad \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow M = A \quad \text{ou} \quad M \in (AB) - \{A, B\} \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) - \{B\}\end{aligned}$$