**Exercice 1**

Prérequis : $\ln 1 = 0$ et la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$. Calculer h'(x), en déduire que, pour tous réels strictement positifs a et x, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.
2. Utiliser le résultat précédent pour montrer que, pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \text{ et } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

**Exercice 2**

On considère l'équation : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ (E).

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c).$$

3. En déduire les solutions de (E).

**Exercice 3**

On donne le point A(-1). Soit M un point d'affixe z. Pour tout z différent de -1, on note M' le point d'affixe $z' = \frac{iz}{z+1}$.

1. Si z = x + iy, x et y étant réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

On montrera que $z' = \frac{-y + i(x^2 + x + y^2)}{(x+1)^2 + y^2}$

2. Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble F des points M(z) tels que z' soit réel.

**Exercice 4**

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+\ln x)^2 - 2x$ sur $I = ]0,+\infty[$.

On note C sa courbe dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal.

1. Déterminer la limite de f en $0^+$.
2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) = x\left[\frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} - 2\right]$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in I$. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $\ln x - x + 1$.
4. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \ln x - x + 1$.

Etudier le sens de variations de g sur I. En déduire le signe de g sur I.

5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Montrer que la tangente à la courbe C au point d'abscisse e passe par l'origine.