Exercice 1

1. $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$, et $h(1) = 0$. La fonction h est constante nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

CQFD

2. a et b $\in \mathbb{R}^{+*}$. $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$, soit $0 = \ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$, d'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Exercice 2

1. On a : $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$.
2. On vérifie aisément que, pour tout z,

$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 - 4z + 13)$.

3. Pour tout z, $z^2 - 4z + 13 = (z-2)^2 + 9 = (z-2)^2 - (3i)^2 = (z-2-3i)(z-2+3i)$.

Les solutions de l'équation (E) sont i, 2+3i et 2-3i.

Exercice 3

On donne le point A(-1). Soit M un point d'affixe z. Pour tout z différent de -1, on note M' le point d'affixe $z' = \frac{iz}{z+1}$.

1. Si z = x + iy, x et y étant réels, on a :

$$z' = \frac{iz}{z+1} = \frac{iz(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{(ix-y)(x+1-iy)}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{-xy - y + xy + i(x^2 + x + y^2)}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{-y + i(x^2 + x + y^2)}{(x+1)^2 + y^2}$$

2. E est l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.

Pour tout $z \neq -1$, on a :

$$M'(z) \in E \Leftrightarrow \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

E est l'axe des abscisses privé du point A.

3. F est l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.

Pour tout $z \neq -1$, on a :

$$M'(z) \in F \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4$$

F est le cercle de diamètre [OA] privé du point A.

Exercice 4

Pour tout $x \in I =]0,+\infty[$, $f(x) = (1+\ln x)^2 - 2x$.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, il s'ensuit que $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$.

2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2\ln x - 2x = x\left[\frac{1}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} + 2\frac{\ln x}{x} - 2\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (limites du cours) , on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

3. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2(1+\ln x)\frac{1}{x} - 2 = \frac{2}{x}(1+\ln x - x)$.

Sur I, $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + \ln x - x$.

4. Pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	
$g'(x)$	‖	+	0	-	
g (x)	‖	↗	0	↘	

On en déduit que $g(x) < 0$ sur $I - \{1\}$ et g(1) = 0.

5. Les variations de f sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	-	
f (x)	‖ $+\infty$	↘	-1	↘	$-\infty$

6. $f(e) = 4 - 2e$, $f'(e) = \frac{4-2e}{e}$, on a : $\frac{f(e)}{e} = f'(e)$, donc la tangente au point d'abscisse e passe par l'origine.