Exercice 1

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte $0,5$ *point ; une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :
   a. 3 **b.** i **c.** $3+\mathrm{i}$
2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :
   a. $|z|+1$ **b.** $|z-1|$ **c.** $|\mathrm{i}\overline{z}+1|$
3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
   a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$
4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a. $n=3$ **b.** $n=6k+3$, avec k relatif **c.** $n=6k$ avec k relatif
5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :
   a. la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre [AB] **c.** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O
6. Soit Ω le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4\mathrm{i}|$ a pour équation :
   a. $y=-x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z=1-\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel
7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :
   a. $1-4\mathrm{i}$ **b.** $-3\mathrm{i}$ **c.** $7+4\mathrm{i}$
8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :
   a. $\{1-\mathrm{i}\}$ **b.** L'ensemble vide **c.** $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
Soit A le point d'affixe $z_A=2$ et B le point d'affixe $z_B=-1+i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe $f(z)$ définie par

$$f(z)=\frac{iz+1+i}{z-2}.$$

1. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que $f(z)=1$.

2. On pose $z = x + iy$ (x et y sont des nombres réels). Démontrer que

$$f(z) = \frac{x + 3y - 2 + i\left(x^2 + y^2 - x - y - 2\right)}{(x-2)^2 + y^2}$$

3. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit réel.
4. Déterminer l'ensemble G des points M d'affixe z telle que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 3

Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ où z désigne un complexe.

1. Vérifier que pour tout complexe z : $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.
2. Résoudre $P(z) = 0$.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.
4. Soit M le symétrique de D par rapport à O. Montrer que l'affixe de M est $z_M = -3 + 2i\sqrt{3}$.

Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle de $\dfrac{z_C - z_B}{z_M - z_B}$. En déduire la nature du triangle BMC.

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 = -9 - 40i$ (E)

1. On pose $z = a + ib$ la forme algébrique de z.
Montrer que z est solution de (E) si et seulement si (a, b) est solution du système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ ab = -20 \end{cases} \quad (S).$$

2. Résoudre S.
3. En déduire les solutions de (E).