

Exercice 1

1	2	3	4	5	6	7	8
c	c	b	b	c	c	a	c

Exercice 2

Soit A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe $-1 + i$.

Soit M différent de A, d'affixe z , on note M' le point d'affixe $z' = f(z)$ où $f(z) = \frac{iz+1+i}{z-2}$.

1. $M(z) \in E$

$$\Leftrightarrow f(z) = 1$$

$$\Leftrightarrow z - 2 = iz + 1 + i \quad (z \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow z(1-i) = 3+i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3+i}{1-i} = 1+2i$$

2. On pose $z = x + iy$ où x et y sont réels. On a alors :

$$f(z) = \frac{iz+1+i}{z-2} = \frac{(1-y+i(1+x))(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} = \frac{x+3y-2+i(x^2+y^2-x-y-2)}{(x-2)^2+y^2}.$$

3. $M(z) \in F$

$$\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0, \quad z \neq 2$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}, \quad z \neq 2$$

$F = C - \{A\}$ où $C = C(\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \sqrt{\frac{5}{2}})$. On remarquera que C est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. $M(z) \in G$

$$\Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0, \quad z \neq 2$$

G est la droite D d'équation $x + 3y - 2 = 0$ privée du point A. On remarquera que $D = (AB)$.

Exercice 3

Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ où z désigne un complexe.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = z^4 - 6z^3 + 21z^2 + 3z^2 - 18z + 63 = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = P(z).$$

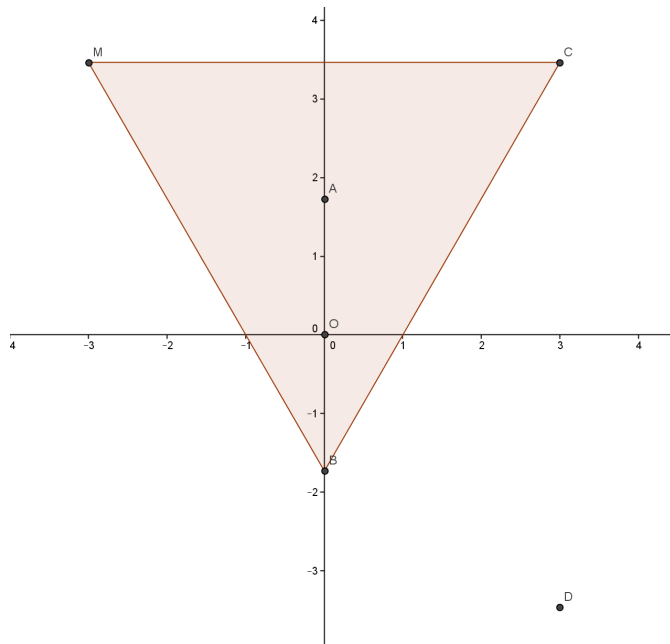
2. Pour tout z , on a :

$$P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 3 = 0 \text{ ou } z^2 - 6z + 21 = 0 (\Delta = -48 = (4i\sqrt{3})^2)$$

$$\Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{3} \text{ ou } z = \frac{6 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2i\sqrt{3}$$

3. Figure



4. M le symétrique de D par rapport à O, donc $z_M = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$.

On a :

$$\frac{z_C - z_B}{z_M - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{-(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On en déduit que le triangle BMC est équilatéral indirect, en effet :

$$\left| \frac{z_C - z_B}{z_M - z_B} \right| = \frac{BC}{BM} = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_M - z_B}\right)[2\pi] = -\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Exercice 4

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 = -9 - 40i$ (E)

On pose $z = a + ib$ la forme algébrique de z , alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Ainsi z est solution de (E) si et seulement si (a, b) est solution du système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ ab = -20 \end{cases} \quad (S).$$

2. On a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -9 \\ ab = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -20 \\ a^2 - \frac{400}{a^2} = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -20 \\ a^4 + 9a^2 - 400 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = -20 \\ a^2 = 16 \end{cases} \quad \text{car } a^4 + 9a^2 - 400 = (a^2 - 16)(a^2 + 25)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

3. Les solutions de (E) sont $\pm(4 - 5i)$.