Vendredi 10 février 2012
Durée : 4h

BACCALAUREAT BLANC
MATHEMATIQUES

SUJET D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

EXERCICE 1 (4pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$.
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=2z_B$ et $z_D=3$.
Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.
3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
4. Calculer $\dfrac{z_C-3}{z_A-3}$. En déduire la nature du triangle DAC.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note r la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle C' l'image de C par h, et C'' l'image de C' par r.
Montrer que les droites (AC) et $(C'C'')$ sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 (5pts)

Partie A – Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=x^2+4\ln x$.

1. Déterminer le tableau de variation f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α et une seule dans $\left]0;+\infty\right[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B – Un problème de distance

On appelle Γ la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $\varphi(x)=2\ln x$.

L'objectif de cette partie est de montrer que parmi les points de la courbe Γ, il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine que tous les autres.

1. Soit M un point de la courbe Γ et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.
2. Soit h la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $h(x)=x^2+4\left(\ln x\right)^2$.
Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.
En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe Γ tel que pour tout point M de Γ, distinct de A, on ait $OM>OA$.

EXERCICE 3 (6pts)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - x\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de g.

Partie B

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ $(n \geq 1)$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
   a. Le sens de variation de (u_n).
   b. La limite éventuelle de (u_n).
2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \ln(u_n)$ $(n \geq 1)$.
   a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = n - n\ln n$.
   b. En utilisant la Partie A, déterminer le sens de variation de (v_n).
   c. En déduire le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que (u_n) est bornée.
4. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 (5pts)

Partie A : restitution organisée de connaissances
Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
" Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ".

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un des termes de la suite (u_n).

4. Les nombres 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a. Montrer que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.
   b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0[p]$.
   c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?