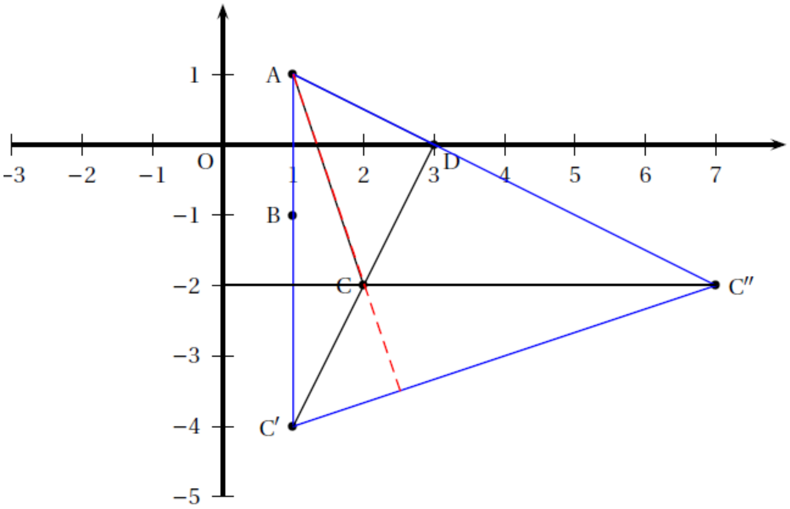
Exercice 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z-1+i)(z-1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm i$.

2. Figure : $z_A = 1+i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$ et $z_D = 3$



3. On a : $DA = |z_A - z_D| = |-2+i| = \sqrt{5}$, $DB = |z_B - z_D| = |-2-i| = \sqrt{5}$ et
$DC = |z_C - z_D| = |-1-2i| = \sqrt{5}$. A, B et C appartiennent au cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.

4. On a :
$\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(1+2i)(2+i)}{5} = \dfrac{5i}{5} = i$. Or $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right)[2\pi]$, donc
$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Le triangle DAC est rectangle isocèle en D et direct .

5. $C' = H(D,2)(C)$ et $C'' = R(D, \pi/2)(C')$. On a :
$z_{C'} - 3 = 2(2-2i-3)$, soit $z_{C'} = 1-4i$; et $z_{C''} - 3 = i(1-4i-3)$, soit $z_{C''} = 7-2i$.
On en déduit : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 1-3i$ et $z_{\overrightarrow{C'C''}} = z_{C''} - z_{C'} = 6+2i$.
D'où : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{C'C''} = 1 \times 6 + (-3) \times 2 = 0$. Les droites (AC) et $(C'C'')$ sont donc perpendiculaires.

Exercice 2

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 4\ln x$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite du cours), donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, au vu du tableau et d'après le corollaire du TVI, il existe α unique sur $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
$f(0,83) \approx -0,056$ et $f(0,84) \approx 0,008$, donc $0,83 < \alpha < 0,84$.

3.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Partie B

On appelle Γ la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = 2\ln x$.

1. Soit M un point de la courbe Γ et x son abscisse, $x > 0$, $M(x,\ 2\ln x)$. On a :

$OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$.

2. Pour tout $x > 0$, $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.

Pour tout $x > 0$, $h'(x) = 2x + 8(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2(x^2 + 4\ln x)}{x} = \dfrac{2f(x)}{x}$.

On en déduit le tableau de variations suivant pour h :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

Soit A le point d'abscisse α de Γ, $A(\alpha,\ 2\ln\alpha)$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[- \{\alpha\}$, $h(x) > h(\alpha)$, d'où $\sqrt{h(x)} > \sqrt{h(\alpha)}$, soit $OM > OA$.

Exercice 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - x\ln x$.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (croissances comparées), donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

Pour tout $x > 0$, $g(x) = x(1 - \ln x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g est somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$, et , pour tout x de $]0;+\infty[$, $g'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x$.

3. Tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$ $(n \geq 1)$.

1. A l'aide de la calculatrice :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2,7183	1,8473	0,74391	0,21327	0,04749	0,00865	0,00133	0,00018

On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers 0.

1. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \ln(u_n) \quad (n \geq 1)$.

a. Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{e^n}{n^n}\right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n\ln(e) - n\ln(n) = n - n\ln n$.

b. La fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$; or, pour tout $n \geq 1$, $v_n = g(n)$, il s'ensuit que la suite (v_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \exp(v_n)$. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la suite (v_n) est strictement décroissante, il s'ensuit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n \leq u_1$, soit $0 < u_n \leq e$.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Soit $L = \lim u_n$.

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \exp(g(n))$; $\lim g(n) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, d'où, par composition des limites, $\lim u_n = 0$.

Exercice 4

Partie A : restitution organisée de connaissances

Voir cours

Partie B. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

" Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ".

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1. Six premiers termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	6
u_n	10	48	250	1392	8050	47448

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \equiv 0[2]$, $3^n \equiv 1[2]$ et $6^n \equiv 0[2]$, d'où $u_n \equiv 0[2]$.

3. Pour tout entier naturel $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$2^n = 2^{2k} = 4^k \equiv 0[4]$, $3^n = 3^{2k} = 9^k \equiv 1[4]$ et $6^n = 6^{2k} = 36^k \equiv 0[4]$, d'où $u_n \equiv 0[4]$.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un des termes de la suite (u_n).

4. 2 divise tous les u_n, 3 divise u_2, 5 divise u_3, et 7 divise u_5.

5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a. On a p premier, PGCD(p, 2) = 1 et PGCD(p, 3) = 1, donc, par le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$.

Il s'ensuit que $6 \times 2^{p-2} = 3 \times 2^{p-1} \equiv 3[p]$ et $6 \times 3^{p-2} = 2 \times 3^{p-1} \equiv 2[p]$.

b. p est premier avec 2 et 3, donc p est premier avec 6, donc on a aussi $6^{p-1} \equiv 1[p]$.

On a : $6u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6[p] \equiv 0[p]$.

c. D'après 5b, p divise $6u_{p-2}$, or p est premier avec 6, donc, par le théorème de Gauss, p divise u_{p-2}. Ainsi p appartient à (E).