Exercice 1

Deux aquariums A et B d'un magasin d'aquariophilie sont communicants.
On a constaté que chaque jour 80% des poissons de l'aquarium A passent dans l'aquarium B et que 45% des poissons de l'aquarium B passe dans l'aquarium A.
Au départ les poissons sont également répartis entre les deux aquariums.
Soit, pour tout n, $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice état après n étapes, où, pour un poisson pris au hasard, a_n désigne la probabilité d'être dans l'aquarium A et b_n désigne la probabilité d'être dans l'aquarium B.

1. Représenter ce graphe et écrire la matrice de transition T de cette marche aléatoire.
2. Déterminer l'état stable de la marche aléatoire. Interpréter le résultat.

Exercice 2

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par U_0 et, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

1. I est la matrice unité d'ordre 2, montrer que $I - A$ est inversible et déterminer la matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose, pour tout n, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout n, $V_n = A^n V_0$.
3. Vérifier que $A = P\begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}P^{-1}$ où $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout n, $A^n = P\begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix}P^{-1}$.

4. En déduire $\lim A^n$, puis $\lim U_n$.

Exercice 3

On considère une marche aléatoire sur un triangle ABC. On suppose qu'à chaque pas la probabilité de rester sur le sommet vaut 0,5 et la probabilité de quitter le sommet pour un des autres sommets est à chaque fois de 0,25.
Soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice état donnant les probabilités d'arrivée respectives en A, B et C après n étapes.

1. Donner la matrice de transition M de cette marche.
2. Déterminer l'état stable de cette marche.
3. Montrer que, pour tout n, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + a_n)$.

En utilisant les résultats du cours sur les suites arithmético-géométriques, montrer que la suite (a_n) converge vers 1/3.
Montrer de même que la suite (b_n) converge.

4. En déduire que la marche converge.