

Exercice 1

1. L'évolution est une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets A et B.

La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}, p = 0,8 \text{ et } q = 0,45.$$

Pour tout n, $X_{n+1} = X_n M$.

2. On a : $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, donc pour tout état initial X_0 , (X_n) converge vers l'unique état stable.

$$\text{L'état stable du graphe est } \left(\frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right) = (0,36 \quad 0,64).$$

A terme il y aura 36% des poissons dans l'aquarium A et 64% dans l'aquarium B.

Exercice 2

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par U_0 et, pour tout n,

$$U_{n+1} = AU_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

$$1. I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, \det(I - A) = 0,54.$$

$$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B. \text{ A la calculatrice } C = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 4/18 \end{pmatrix}.$$

2. On pose, pour tout n, $V_n = U_n - C$.

Montrons, par récurrence, pour tout n, $V_n = A^n V_0$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Si, pour n quelconque, $V_n = A^n V_0$, alors

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0.$$

D'où l'hérédité.

$$3. \text{ Soit } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on vérifie que } A = P \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Montrons, par récurrence, que, pour tout n, } A^n = P \begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{La propriété est vraie pour } n = 0, \text{ en effet : } A^0 = I = P \begin{pmatrix} 0,4^0 & 0 \\ 0 & 0,1^0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Si, pour n quelconque, } A^n = P \begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A^n = P \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4^n & 0 \\ 0 & 0,1^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0,4^{n+1} & 0 \\ 0 & 0,1^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

$$4. \lim 0,4^n = \lim 0,1^n = 0, \text{ donc } \lim A^n = 0, \text{ d'où } \lim V_n = 0 \text{ puis } \lim U_n = C.$$

Exercice 3

On considère une marche aléatoire sur un triangle ABC. On suppose qu'à chaque pas la probabilité de rester sur le sommet vaut 0,5 et la probabilité de quitter le sommet pour un des autres sommets est à chaque fois de 0,25.

Soit $X_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice état donnant les probabilités d'arrivée respectives en A, B et C après n étapes.

1. $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. On cherche une matrice $X = (a \ b \ c)$ telle que $X = XM$ avec $a + b + c = 1$.

$$X = XM \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 2a + b + c \\ 4b = a + 2b + c \\ 4c = a + b + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + c \\ 2b = a + c \\ 2c = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 - a \\ 2b = 1 - b \\ 2c = 1 - c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1/3$$

3. Pour tout n , $a_{n+1} = \frac{1}{4}(2a_n + b_n + c_n) = \frac{1}{4}(1 + a_n)$ en utilisant $a_n + b_n + c_n = 1$.

$\left| \frac{1}{4} \right| < 1$, donc, d'après le cours, (a_n) converge vers α avec $\alpha = \frac{1}{4}(1 + \alpha)$ d'où $\alpha = 1/3$.

De même, pour tout n , $b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 2b_n + c_n) = \frac{1}{4}(1 + b_n)$

Donc la suite (b_n) converge elle aussi vers $1/3$.

4. Si (a_n) et (b_n) converge vers $1/3$, alors (c_n) converge aussi vers $1/3$.

La suite (X_n) converge donc vers l'état stable.