Exercice 1

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par U_0 et, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. $I - A = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$, det(I – A) = 0,1, $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I-A)^{-1}B$.

Donc $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$.

2. On pose, pour tout n, $V_n = U_n - C$.

Montrons, par récurrence, que, pour tout n, $V_n = A^n V_0$.

La propriété est vraie pour n = 0.

Si, pour n quelconque, $V_n = A^n V_0$, alors

$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$.

D'où l'hérédité.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, det(P) = 3, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1,6 & -0,5 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2,1 & 0,6 \\ 0,3 & 1,8 \end{pmatrix} = A$

.

Montrons, par récurrence, que, pour tout n, $A^n = P\begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}P^{-1}$.

La propriété est vraie pour n = 0, en effet : $A^0 = I = P\begin{pmatrix} 0,8^0 & 0 \\ 0 & 0,5^0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Si, pour n quelconque, $A^n = P\begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}P^{-1}$, alors

$$A^{n+1} = AA^n = P\begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0,5^{n+1} \end{pmatrix}P^{-1}$$

D'où l'hérédité.

4. $\lim 0,8^n = \lim 0,5^n = 0$, donc $\lim A^n = 0$, d'où $\lim V_n = 0$ puis $\lim U_n = C$.

Exercice 2

Partie A

On considère l'équation (E) : 25x – 108y = 1, où x et y sont des entiers relatifs.

1. $25 \times 13 - 108 \times 3 = 325 - 324 = 1$, donc le couple (13, 3) est solution de (E).

En particulier, d'après le théorème de Bezout, PGCD(25, 108) = 1.

2. Pour tous x et y $\in \mathbb{Z}$, on a :

$25x - 108y = 1$

$\Leftrightarrow 25x - 108y = 25(13) - 108(3)$

$\Leftrightarrow 25(x-13) = 108(y-3) \qquad (1)$

108 divise 25(x – 13) et PGCD(25 , 108) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 108 divise $x-13$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que x – 13 = 108k. Il vient alors, en remplaçant dans (1), $25 \times 108k = 108(y-3)$, soit y – 3 = 25k.

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = 13 + 108k \\ y = 3 + 25k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Partie B

a est un entier naturel et c et g sont des entiers naturels vérifiant $25g - 108c = 1$.

1. Si 7 divise x – a et si 19 divise x – a , alors $7 \times 19 = 133$ divise aussi x – a , car $\text{PGCD}(7,19) = 1$.

2. a. Si a n'est pas un multiple de 7, par le petit théorème de Fermat $a^6 \equiv 1[7]$; d'où $(a^6)^{18} \equiv 1[7]$, soit $a^{108} \equiv 1[7]$.

On a : $\left(a^{25}\right)^g = a^{25g} = a^{108c+1} = (a^{108})^c a$, or $a^{108} \equiv 1[7]$, il s'ensuit que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

b. Si $a \equiv 0[7]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \equiv a[7] \equiv 0[7]$, donc $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

c. On montre de même que, pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$.

On a : $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$ et $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$, donc, d'après 1., $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$.

3. D'après la partie A, une valeur possible pour g est 13.

Si $a^{25} \equiv r[133]$, alors $r^{13} \equiv \left(a^{25}\right)^{13}[133]$. Or, d'après la question précédente, $\left(a^{25}\right)^{13} \equiv a[133]$, donc $r^{13} \equiv a[133]$.