

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

Que peut-on conjecturer pour A^n où $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer-le par récurrence.

Exercice 2

Soit le système :
$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 2x + 3y + 4z = -6 \\ 3x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Donner l'écriture matricielle $AU = V$ du système.

Calculer l'inverse de A à la calculatrice en donnant les coefficients sous forme fractionnaire.

Calculer la solution du système.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n , $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3 .

2. Pour tout n , $C_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Soit A la matrice carrée d'ordre 2 telle que : $C_{n+1} = AC_n$.

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout n , $C_n = A^n C_0$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. A l'aide des questions précédentes, on peut donc établir, et on l'admet, que, pour tout n :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$$

En déduire que, pour tout n , $u_n = 2^n + 2 \times 3^n$.