Exercice 1

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A \text{ et } A^3 = A^2 \times A = 3A \times A = 3A^2 = 3^2 A.$$

On peut conjecturer que $A^n = 3^{n-1} A$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1} A \times A = 3^{n-1} A^2 = 3^n A.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

$$\text{Soit le système : } \begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 2x + 3y + 4z = -6 \\ 3x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

$$\text{L'écriture matricielle } AU = V \text{ du système est : } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ à la calculatrice } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ 10 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n , $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. $u_2 = 22$ et $u_3 = 62$.

2. Pour tout n , $C_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Pour tout } n, A \times C_n = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = C_{n+1}.$$

Montrons que, pour tout n , $C_n = A^n C_0$.

$$A^0 \times C_0 = I \times C_0 = C_0, \text{ la propriété est vraie pour } n = 0.$$

Si, pour n quelconque, $C_n = A^n \times C_0$, alors $C_{n+1} = A \times C_n = A \times A^n \times C_0 = A^{n+1} \times C_0$.

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. $\text{Det}(P) = -1$, donc P est inversible et $P^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b. On a :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

c. Démontrons par récurrence que, pour tout n , $A^n = PD^nP^{-1}$.

$P \times D^0 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = A^0$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Si, pour n quelconque, $P \times D^n \times P^{-1} = A^n$, alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^n \times D \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

4. A l'aide des questions précédentes, on peut donc établir, et on l'admet, que, pour tout n :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$$

Pour tout n ,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = C_n = A^n \times C_0 = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} \\ 2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout n , $u_n = 2^n + 2 \times 3^n$.