Exercice 1

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = \ln(1+x)$. $\lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$, $\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, d'où, par composition des limites, $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{x+1} > 0$, f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)dx$. On fait une intégration par parties.
Les fonctions u et v dérivables sur [0, 1] sont choisies telles que :

$u(x) = \ln(1+x) \qquad u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x+1$

u, u', v et v' sont continues sur [0, 1], la formule d'intégration par parties donne :

$I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \left[(x+1)\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 1dx = \left[(x+1)\ln(1+x) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

$f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $f_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

I_1 est l'aire, en unités d'aire, entre la courbe de f_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a successivement :

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^n \leq 1$ car $x \mapsto x^n$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$

$1 \leq 1 + x^n \leq 2$

$0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$ car ln est croissante

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2dx = \ln 2$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a successivement :

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$

$1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$

$0 \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ car ln est croissante

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

La suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$.

x	0	$+\infty$
g'(x)	0	-
g(x)	0 ↘	

b. Au vu du tableau, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n \geq 0$, donc $g(x^n) \leq 0$, soit $\ln(1+x^n) \leq x^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x^n) \leq x^n$; d'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim I_n = 0$.

Exercice 2

f est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ telle que f(0) = e.

1. La solution générale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-x}$. y(0) = e donc C = e. On en déduit que, pour tout x, $f(x) = e^{1-x}$.

2. a. On a : $V = \int_1^e \pi x^2 dy = \pi \int_1^e (1 - \ln y)^2 dy$.
En effet : $e^{1-x} = y \Leftrightarrow 1 - x = \ln y \Leftrightarrow x = 1 - \ln y$
b. $V = \pi \int_1^e (1 - \ln y)^2 dy$. On fait une première intégration par parties.
Les fonctions u et v dérivables sur [1, e] sont choisies telles que :

$u(y) = (1 - \ln y)^2 \qquad u'(y) = -2\frac{1 - \ln y}{y}$

$v'(y) = 1 \qquad v(y) = y$

u, u', v et v' sont continues sur [1, e], la formule d'intégration par parties donne :

$V = \pi\left[y(1 - \ln y)^2\right]_1^e + 2\pi \int_1^e (1 - \ln y) dy$.

On procède à une seconde intégration par parties.
Les fonctions u et v dérivables sur [1, e] sont choisies telles que :

$u(y) = (1 - \ln y) \qquad u'(y) = -\frac{1}{y}$

$v'(y) = 1 \qquad v(y) = y$

u, u', v et v' sont continues sur [1, e], la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
V &= \pi\left[y(1 - \ln y)^2\right]_1^e + 2\pi\left[y(1 - \ln y)\right]_1^e + 2\pi \int_1^e 1 dy \\
&= \pi\left[y(1 - \ln y)^2 + 2y - 2y \ln y + 2y\right]_1^e \\
&= \pi\left[y((\ln y)^2 - 4\ln y + 5)\right]_1^e \\
&= \pi(2e - 5)
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit la fonction f définie, pour tout x réel, par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

1. Pour tout x, $f'(x) = -2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + e^{-2x} \times \frac{2e^x}{1 + 2e^x} = -2f(x) + \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$.

2. On considère l'équation différentielle : $y'+2y = 2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ (E).

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+2f(x) = \dfrac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$.

Donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Montrons qu'une fonction g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g – f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'+2y = 0$ (E').

On a :

g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x)+2g(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}} = f'(x)+2f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (g-f)'(x)+2(g-f)(x) = 0$$

$\Leftrightarrow (g-f)$ est solution de (E') sur $\mathbb{R}$

c. La solution générale de (E') est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x}$ où C est une constante réelle.

d. On en déduit que la solution générale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)+Ce^{-2x}$ où C est une constante réelle.