

Exercice 1. $I = \int_{-1}^0 \frac{6x^2 - 12x + 42}{(x-1)^2} dx$

1. Pour tout $x \neq 1$, $\frac{6x^2 - 12x + 42}{(x-1)^2} = \frac{6(x-1)^2 + 36}{(x-1)^2} = 6 + \frac{36}{(x-1)^2}$.

2. $I = \int_{-1}^0 \left(6 + \frac{36}{(x-1)^2} \right) dx = \left[6x - \frac{36}{x-1} \right]_{-1}^0 = 36 - (-6 + 18) = 24$

Exercice 2. $I = \int_0^1 e^{-x}(x+2)dx$.

1. Cherchons une primitive de $x \mapsto e^{-x}(x+2)$ sous la forme $F(x) = e^{-x}(ax+b)$.

Pour tout x , $F'(x) = e^{-x}(-ax-b+a)$. D'où $a = -1$ et $b = -3$.

2. $I = \int_0^1 e^{-x}(x+2)dx = \left[e^{-x}(-x-3) \right]_0^1 = 3 - 4e^{-1}$

Exercice 3. $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

1. $I + J = \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$

$I - J = \int_0^{2\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{2\pi} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = 0$

2. On en déduit que $I = J = \pi$

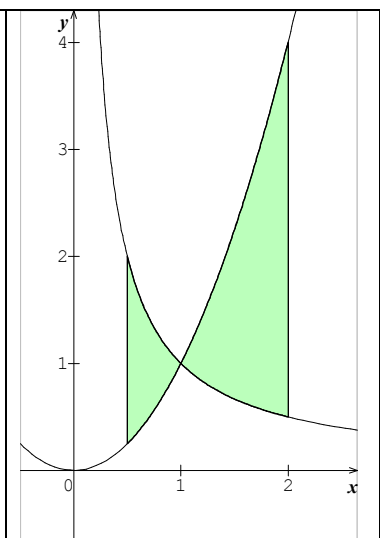
Exercice 4. On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Soit C_f et C_g les courbes respectives dans un repère orthogonal.

Soit A l'aire, en u.a., du domaine entre les deux courbes sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$.

Pour tout $x \in [1/2, 2]$, $f(x) - g(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x}$. D'où :

x	$1/2$	1	2
$f(x)-g(x)$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{1/2}^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \\
 &= \int_{1/2}^1 (1/x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1/x) dx \\
 &= \left[\ln x - \frac{x^3}{3} \right]_{1/2}^1 + \left[-\ln x + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\
 &= -\frac{1}{3} + \ln 2 + \frac{1}{24} - \ln 2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{49}{24}
 \end{aligned}$$



Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. $u_0 = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et h la fonction définie, pour tout t , par $h(t) = t^{n+1} e^t$.

a. Pour tout t , $h'(t) = (n+1)t^n e^t + t^{n+1} e^t$.

b. On en déduit que, pour tout n , $\int_0^1 h'(t) dt = \int_0^1 ((n+1)t^n e^t + t^{n+1} e^t) dt$.

Or $\int_0^1 h'(t) dt = [h(t)]_0^1 = e$, d'où $e = (n+1) \int_0^1 t^n e^t dt + \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$, soit $(n+1)u_n + u_{n+1} = e$.

3. $u_1 = e - u_0 = 1$, $u_2 = e - 2u_1 = e - 2$, $u_3 = e - 3u_2 = 6 - 2e$.

4. La fonction $t \mapsto t^n e^t$ est positive sur $[0, 1]$, donc $u_n = \int_0^1 t^n e^t dt \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n \geq 0$, donc $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$, or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement,

$\lim u_n = 0$.

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx$.

1. Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x-1 \leq 0$$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 1$$

$$0 \leq (x-1)^{2n+2} \leq (x-1)^{2n} \quad \text{car } (x-1)^{2n} \geq 0$$

$$0 \leq (x-1)^{2n+2} e^{-x} \leq (x-1)^{2n} e^{-x}$$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq -x \leq 0$$

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

$$0 \leq (x-1)^{2n} e^{-x} \leq (x-1)^{2n} \quad \text{car } (x-1)^{2n} \geq 0$$

3. D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 (x-1)^{2n} dx = \left[\frac{1}{2n+1} (x-1)^{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

4. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim u_n = 0$.