Exercice 1 QCM

Pour chaque question une seule des propositions est exacte.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1-2i+e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.
   - **a.** (E) est une droite passant par le point d'affixe $2-2i$.
   - **b.** (E) est le cercle de centre d'affixe $-1+2i$ et de rayon 1.
   - **c.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon 1.
   - **d.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.
2. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1+i| = |z+1+2i|$.
   Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1-i$, $-1+2i$ et $-1-2i$.
   - **a.** C est un point de (F).
   - **b.** (F) est la médiatrice du segment [AB].
   - **c.** (F) est la médiatrice du segment [AC].
   - **d.** (F) est le cercle de diamètre [AB].
3. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z+|z|^2 = 7+i$. Cette équation admet :
   - **a.** Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
   - **b.** Une solution réelle.
   - **c.** Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
   - **d.** Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.
À tout point M d'affixe $z_M = x+iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que B$M' = 2OI$ (propriété 2).

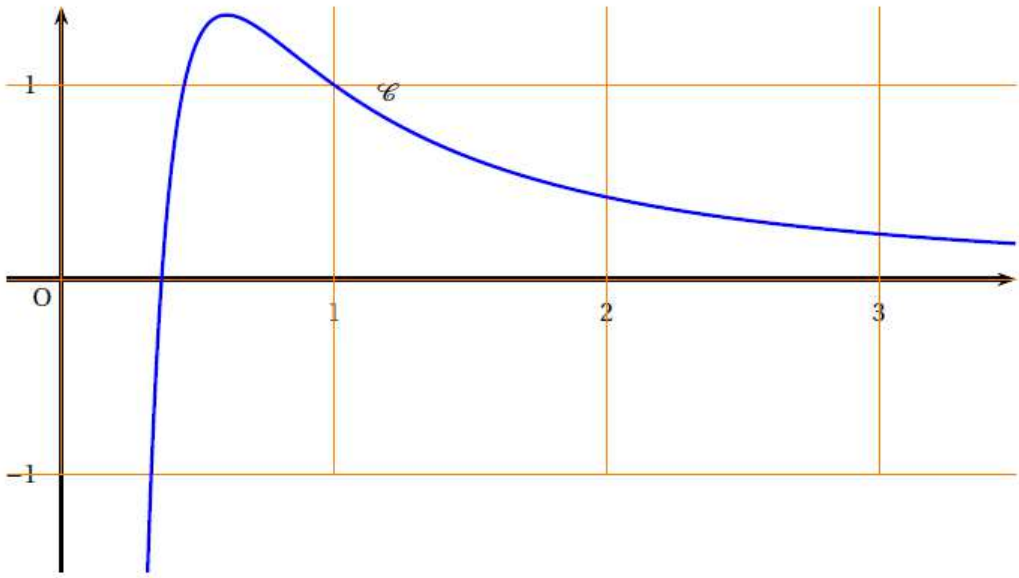
1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de z_M.
   - **b.** Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3}-i$.
     Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   - **c.** Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
     Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x+iy$ avec $y \neq 0$.
   - **a.** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   - **b.** Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   - **c.** Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   - **d.** Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   - **e.** Montrer que B$M' = 2OI$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.
   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.