Baccalauréat Blanc 2015 - Terminale S1
Mathématiques

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Exercice 1 (5 points)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

   $$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 2 (5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
— F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
— T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
   a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
   c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.
La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.
   Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 4 spécialité (5 points)

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B
Traitement :	
	Affecter à D la valeur de $B - A$
	Tant que $D > 0$ B prend la valeur de A A prend la valeur de D Si $B > A$ Alors D prend la valeur de $B - A$ Sinon D prend la valeur de $A - B$ Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.

En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.

En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

a. Justifier qu'il existe des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 221x - 331y = 1.$$

b. Vérifier que le couple $(3\,;\,2)$ est une solution de l'équation (E).

En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

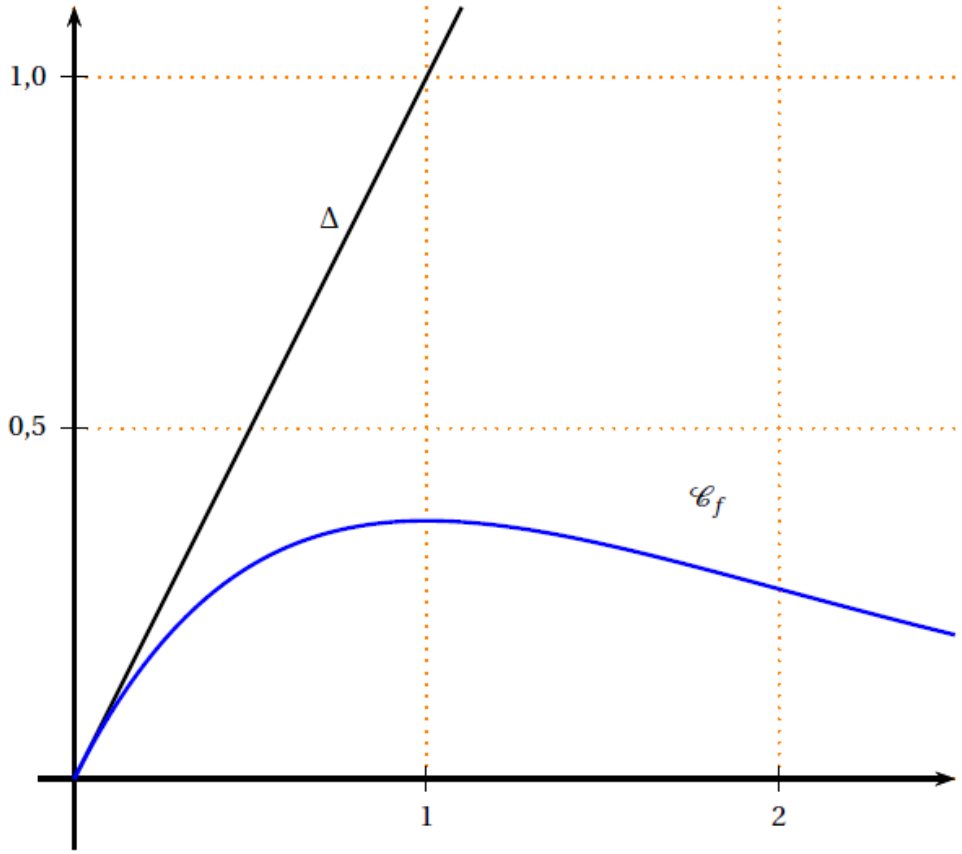
$$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;\,q)$ tels que $u_p = v_q$, $\quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad$ et $\quad 0 \leqslant q \leqslant 500$.

Annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie

Partie B - Question 1



Annexe de l'exercice 4 à rendre avec la copie

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	*B*	*D*
12	14	