Exercice 1

Pour tout z complexe, $f(z)=z^2+2z+9$.

1. $f(-1+i\sqrt{3})=(-1+i\sqrt{3})^2+2(-1+i\sqrt{3})+9=1-3-2i\sqrt{3}-2+2i\sqrt{3}+9=5$.

2. Pour tout z, on a :

$f(z)=5$

$\Leftrightarrow z^2+2z+4=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2+3=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2-(i\sqrt{3})^2=0$

$\Leftrightarrow z=-1\pm i\sqrt{3}$

$z_A=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3. Pour tout z, on a :

$f(z)=\lambda$

$\Leftrightarrow z^2+2z+9-\lambda=0$

Cette dernière équation admet 2 solutions complexes conjuguées si et seulement si le discriminant Δ est strictement négatif.

$\Delta=4-4(9-\lambda)=4(\lambda-8)$; $\Delta<0\Leftrightarrow\lambda<8$.

4. Pour tout z, on a :

$|f(z)-8|=3$

$\Leftrightarrow |z^2+2z+9-8|=3$

$\Leftrightarrow |z^2+2z+1|=3$

$\Leftrightarrow |(z+1)^2|=3$

$\Leftrightarrow |z+1|=\sqrt{3}$

Si M(z) et $\Omega(-1)$, alors $\Omega M=|z+1|$.

Donc F est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

5. a. On pose $z=x+iy$ où x et y sont réels.

Pour tout z,

$f(z)=(x+iy)^2+2(x+iy)+9=x^2-y^2+2ixy+2x+2iy+9=x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y)$.

b. Pour tout z, on a :

$M(z)\in E$

$\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2xy+2y=0$

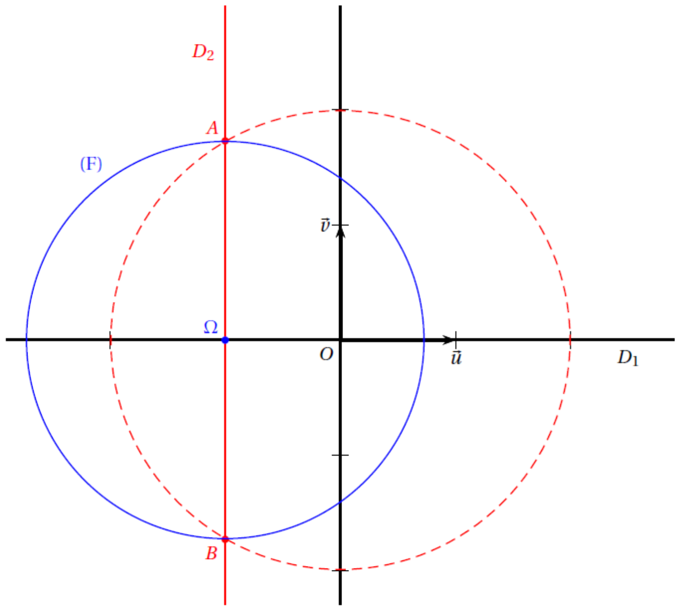
$\Leftrightarrow y(x+1)=0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $x=-1$

E est la réunion des droites D1 d'équation y = 0 et D2 d'équation x = -1.

6. Les points d'intersection de D1 avec F ont pour coordonnées $\left(-1-\sqrt{3},0\right)$ et $\left(-1+\sqrt{3},0\right)$.

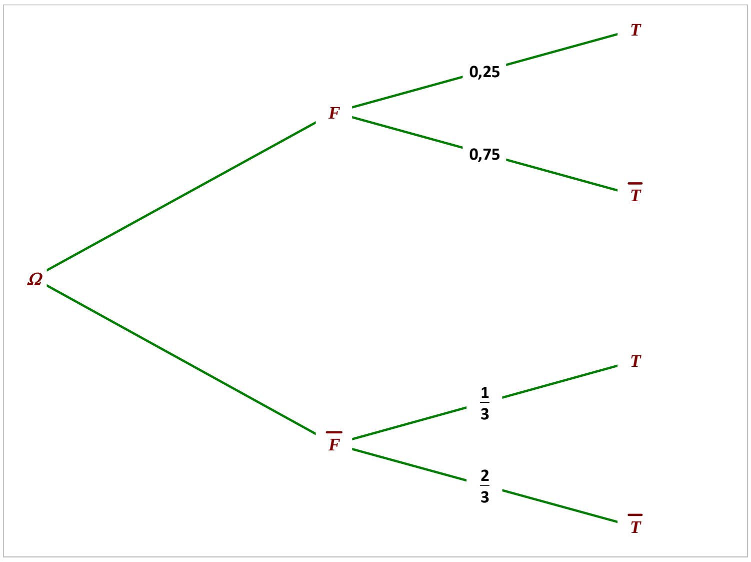
Les points A et B appartiennent à F et ils ont pour abscisse -1, ce sont les deux points d'intersection de F avec D2.



Exercice 2

Partie A

1. Avec un arbre



On a : $P(T) = \frac{1}{4}P(F) + \frac{1}{3}(1 - P(F)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}P(F)$.

D'où $\frac{1}{3} - \frac{1}{12}P(F) = \frac{3}{10}$, ce qui amène : $P(F) = 12\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

2. $P_T(F) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$.

Partie B

1. a. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'adhérents à la section de tennis choisis. Les choix se faisant de manière indépendante, Y suit la loi binomiale de paramètres 4 et 0,3.

$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,3^2 \times 0,7^2 = \frac{1323}{5000} = 0,2646$.

b. En passant à l'événement contraire, il est clair que $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} & p_n \geq 0,99 \\ & \Leftrightarrow 1-(0,7)^n \geq 0,99 \\ & \Leftrightarrow (0,7)^n \leq 0,01 \\ & \Leftrightarrow n\ln(0,7) \leq \ln(0,01) \\ & \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \approx 12,91 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 13$, on a $p_n \geq 0,99$.

2. Soit X la variable aléatoire gain.

a. $X(\Omega) = \{-5, 15, 35\}$ et $\text{card}(\Omega) = \binom{100}{2} = 4950$. Il y a équiprobabilité des tirages.

$$P(X=-5) = \frac{\binom{90}{2}}{4950} = \frac{4005}{4950} = \frac{89}{110},\ P(X=35) = \frac{\binom{10}{2}}{4950} = \frac{45}{4950} = \frac{1}{110},\ \text{d'où } P(X=15) = \frac{20}{110}.$$

b. $E(X) = \frac{1}{110}(-5\times 89 + 35 + 15\times 20) = -\frac{110}{110} = -1$.

Le jeu est défavorable au joueur, la perte moyenne de la partie est de 1 euro.
Sur un grand nombre de jeux sa perte moyenne par jeu se rapproche de 1 euro.

Exercice 3

Partie A

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite du cours), donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

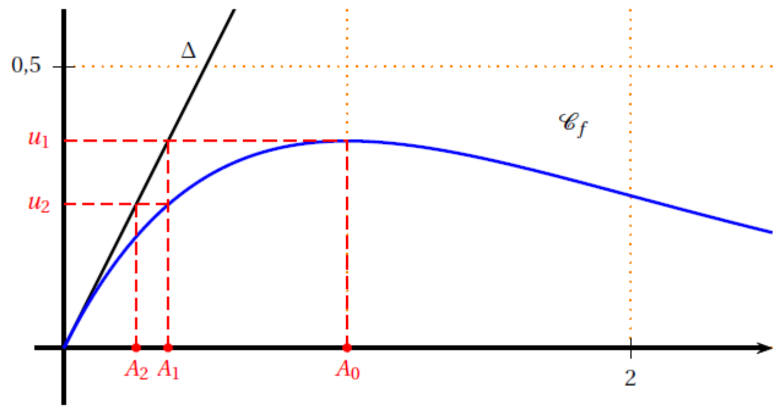
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
f ' (x)		+	0	-	
f (x)	0	$\nearrow$	1/e	$\searrow$	0

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Graphique



2. Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n > 0$.
La propriété est vraie pour n = 0, $u_0 = 1$.
Supposons que, pour n entier quelconque, $u_n > 0$, alors, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n e^{-u_n} > 0$.
La propriété est donc héréditaire.
Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

3. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$.
Or pour tout n, $u_n > 0$, donc $e^{-u_n} < 1$, d'où $e^{-u_n} - 1 < 0$, de là $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite est donc strictement décroissante.

4. a. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Soit $L = \lim u_n$.
b. La limite L vérifie $Le^{-L} = L$.
Or : $Le^{-L} = L \Leftrightarrow L = 0$ ou $e^{-L} = 1 \Leftrightarrow L = 0$.
Donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 4

1. Tableau

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

La valeur affichée est 2.

2. Cet algorithme calcule le PGCD des nombres A et B.
a. PGCD(221, 331) = 1.
Donc par le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs x et y tels que : $221x - 331y = 1$.
b. Soit (E) l'équation : $221x - 331y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
$221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$. Le couple (3, 2) est solution de (E).
Pour tous x et y $\in \mathbb{Z}$, on a :
$221x - 331y = 1$
$\Leftrightarrow 221x - 331y = 221(3) - 331(2)$
$\Leftrightarrow 221(x - 3) = 331(y - 2) \qquad (1)$

331 divise 221(x -3) et PGCD(221 ,331) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 331 divise x -3 ; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que x -3 = 331k. Il vient alors, en remplaçant dans (1), $221 \times 331k = 331(y-2)$, soit y -2 = 221k.

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = 3 + 331k \\ y = 2 + 221k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par : $u_n = 2 + 221n$, et $v_0 = 3$, $v_{n+1} = v_n + 331$.

a. (v_n) est une suite arithmétique de raison 331 et de premier terme $v_0 = 3$, d'où, pour tout n, $v_n = v_0 + 331n = 3 + 331n$.

b. Pour tous p et q entiers naturels, on a :

$$u_p = v_q$$
$$\Leftrightarrow 2 + 221p = 3 + 331q$$
$$\Leftrightarrow 221p - 331q = 1$$

D'après la question 2, p et q sont de la forme

$$\begin{cases} p = 3 + 331k \\ q = 2 + 221k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si k = 0, p = 3 et q = 2, $u_3 = v_2 = 665$.

Si k = 1, p = 334 et q = 223, $u_{334} = v_{223} = 73816$.