Exercice 1

On considère la suite $\left(U_n\right)$ de matrices colonnes définies par U_0 et, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n + B$, où $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. $I - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$, det(I – A) = 0,5, $(I - A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.

$C = AC + B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$.

Donc $C = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. On pose, pour tout n, $V_n = U_n - C$.

Montrons, par récurrence, que, pour tout n, $V_n = A^n V_0$.

La propriété est vraie pour n = 0.

Si, pour n quelconque, $V_n = A^n V_0$, alors

$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$.

D'où l'hérédité.

3. Montrons, par récurrence, que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = \frac{1}{2^{n-1}} A$.

La propriété est vraie pour n = 1.

Si, pour $n \geq 1$ quelconque, $A^n = \frac{1}{2^{n-1}} A$, alors

$A^{n+1} = AA^n = \frac{1}{2^{n-1}} A^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,3 & 0,15 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} A = \frac{1}{2^n} A$.

D'où l'hérédité.

4. $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim A^n = 0$, d'où $\lim V_n = 0$ puis $\lim U_n = C$.

Exercice 2

1. $M^2 = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \\ 48 & 48 & 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} J$.

2. $JM = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = J$.

3. Montrons, par récurrence, que, pour tout $n \geq 2$, $M^n = M^2$.

La propriété est vraie pour n = 2.

Si, pour $n \geq 2$ quelconque, $M^n = M^2$, alors

$M^{n+1} = M^2 M = \frac{1}{3} JM = \frac{1}{3} J = M^2$

D'où l'hérédité.

4. Pour tout $n \geq 2$, $X_n = X_0 M^n = X_0 M^2 = \frac{1}{3} X_0 J = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x & x & x \end{pmatrix}$ où $x = a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

D'où le résultat.