

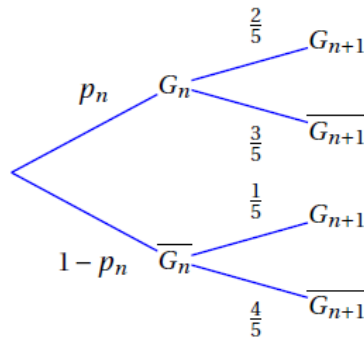
Exercice 1

1. d
2. b
3. b
4. a
5. a
6. c

Exercice 2

Partie A

1. Arbre pondéré :



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1-p_n) = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}u_n.$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ et $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

- c. $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{4}$.

Partie B

1. a. On a un schéma de Bernoulli, la probabilité de gagner la partie reste identique pendant les 10 parties. X , la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées, suit la loi binomiale de paramètres 10 et $1/4$.

- b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,94$

- c. $E(X) = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$

2. a. Soit G le gain, on a : $G = 8X - 30$.

$E(G) = E(8X - 30) = 8E(X) - 30 = 8 \times 2,5 - 30 = -10$, donc le jeu est défavorable au joueur.

- b. On a :

$$\begin{aligned}
 P(G \geq 40) &= P(8X - 30 \geq 40) = P(X \geq 8,75) = P(X = 9) + P(X = 10) \\
 &= 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{31}{4^{10}} \approx 3.10^{-5}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. a. $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), J(2, 0, 1)$

b. On a : $\overrightarrow{DJ}(2, -1, 1), \overrightarrow{BG}(0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{BI}\left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right)$, d'où $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$.

$\overrightarrow{DJ}$ est donc un vecteur normal au plan (BGI).

c. Une équation cartésienne du plan (BGI) est : $2x - y + z + d = 0$.

$B \in (BGI) \Leftrightarrow 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.

Une équation cartésienne de (BGI) est : $2x - y + z - 2 = 0$.

d. $d(F, (BGI)) = \frac{|2 \times 1 - 1 \times 0 + 1 \times 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

2. a. Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b. On a : $K\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ce point appartient à Δ (prendre $\alpha = -\frac{1}{2}$).

c. On a :

$M(x, y, z) \in \Delta \cap (BGI)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x = 1 + 2\alpha, y = -\alpha, z = 1 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 4\alpha + \alpha + 1 + \alpha - 2 = 0 \\ x = 1 + 2\alpha, y = -\alpha, z = 1 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/6 \\ x = 1 + 2\alpha, y = -\alpha, z = 1 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2/3, y = 1/6, z = 5/6$$

d. On a : $\overrightarrow{IL}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right), \overrightarrow{LG}\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, d'où $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{LG} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$, donc L est bien

l'orthocentre du triangle BGI.