Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{\frac{x}{2}}$.

On pose $I=\int_0^1 f(x)dx$.

1. Interpréter géométriquement le réel I.

2. Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et $v(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

a. Vérifier que $f=2(u'v+uv')$.

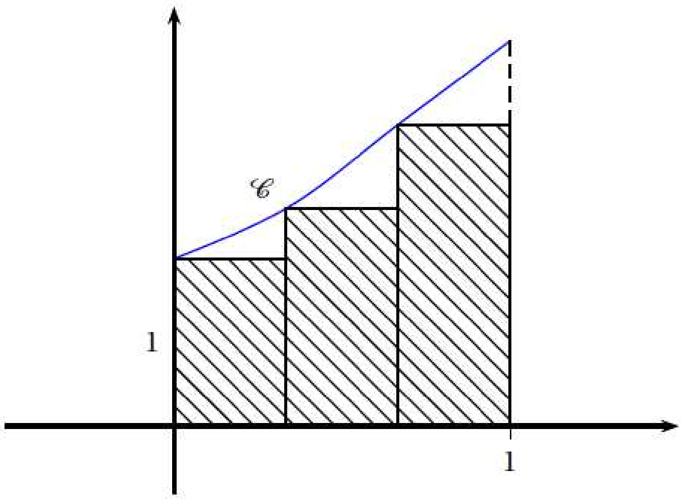
b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ | Affecter à s la valeur $s+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\ln(1+x^n)$, et on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f_1 sur $[0,+\infty[$.

c. Montrer que $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de f_1 sur $[0,+\infty[$.

Calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n \le \ln 2$.

b. Etudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire la convergence de la suite (I_n).

3. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$\ln(1+x^n) \le x^n$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 3

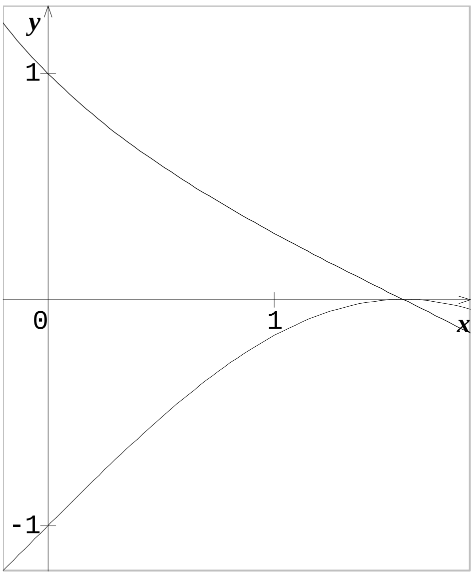
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle I = $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ et $g(x) = \sin x - 1$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Les courbes C_f et C_g sont données ci-dessous.

On admet que C_f est au-dessus de C_g sur I.



1. On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$.
   a. Calculer K.
   b. Justifier que $J = \ln 2$.

2. Soit D le domaine du plan limité par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations x = 0 et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire du domaine D en cm^2.