Exercice 1

1. La fonction f est continue et positive sur [0, 1], le réel I représente l'aire, en unités d'aire, du domaine $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le f(x)$.

2. a. Pour tout x, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, on a alors :

$2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = 2(e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}) = e^{\frac{x}{2}}(x+2) = f(x)$.

b. Pour tout x, $2(uv)'(x) = 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$.
Ainsi $f = 2(uv)'$, donc une primitive de f est 2uv.

On en déduit que $I = \int_0^1 2(uv)'(x)dx = 2\left[u(x)v(x)\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}}$.

3. a. $s_3 = \frac{1}{3}(f(0) + f(1/3) + f(2/3))$ représente bien l'aire des trois rectangles hachurés.

b. On applique la méthode des rectangles, donc $\lim s_n = I$.

Exercice 2

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) = \ln(1+x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, d'où, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$, f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c. $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)dx$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$. D'où :

$I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \left[(x+1)\ln(1+x) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

$f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $f_1 \ge 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

I_1 est l'aire, en unités d'aire, entre la courbe de f_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a successivement :
$0 \le x \le 1$
$0 \le x^n \le 1$ car $x \mapsto x^n$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$
$1 \le 1 + x^n \le 2$
$0 \le \ln(1+x^n) \le \ln 2$ car ln est croissante

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \le I_n \le \int_0^1 \ln 2dx = \ln 2$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a successivement :
$0 \le x \le 1$
$0 \le x^{n+1} \le x^n$ car $x^n \ge 0$ sur $\mathbb{R}^+$
$1 \le 1 + x^{n+1} \le 1 + x^n$
$0 \le \ln(1+x^{n+1}) \le \ln(1+x^n)$ car ln est croissante

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

La suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$.

x	0	$+\infty$
g'(x)	0	-
g(x)	0 ↘	

b. Au vu du tableau, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \le 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n \ge 0$, donc $g(x^n) \le 0$, soit $\ln(1+x^n) \le x^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x^n) \le x^n$; d'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $I_n \le \int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$. Or $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim I_n = 0$.

Exercice 3

1. a. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)dx = \left[-\cos x - x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \pi/2.$

b. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+\sin x} dx = \left[\ln(1+\sin x)\right]_0^{\pi/2} = \ln 2$.

2. D est le domaine du plan limité par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations x = 0 et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Sur l'intervalle I, $f(x) - g(x) \ge 0$, donc

$\text{aire}(D) = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))dx = J - K = \ln 2 + \pi/2 - 1$ en u.a., on multiplie par 16 pour avoir l'aire en cm^2.