Baccalauréat Blanc 2013
Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$ où z désigne un complexe.

1. Vérifier que pour tout complexe z : $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.
2. Résoudre $P(z) = 0$.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.
4. Soit M le symétrique de D par rapport à O. Montrer que l'affixe de M est $z_M = -3 + 2i\sqrt{3}$.

Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle de $\dfrac{z_C - z_B}{z_M - z_B}$. En déduire la nature du triangle BMC.

Exercice 2 (5 points)

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

– si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;

– si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)

b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.

Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n).

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 spé (5 points)

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0;1;2;...;24;25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec a = 2 et b = 3, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier n = 15.

étape 2 : le reste de la division de 2×15+3 = 33 par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend a = 0 ?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit a = 13.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend a = 5 et b = 2.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer que si $5n+2$ et $5p+2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n-p$ est un multiple de 26. En déduire que $n=p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n-26y=2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x-26y=2$, avec x et y entiers relatifs.
Donner une solution particulière de l'équation $5x-26y=2$.
Résoudre alors l'équation $5x-26y=2$.
En déduire qu'il existe un unique couple (x ; y) solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

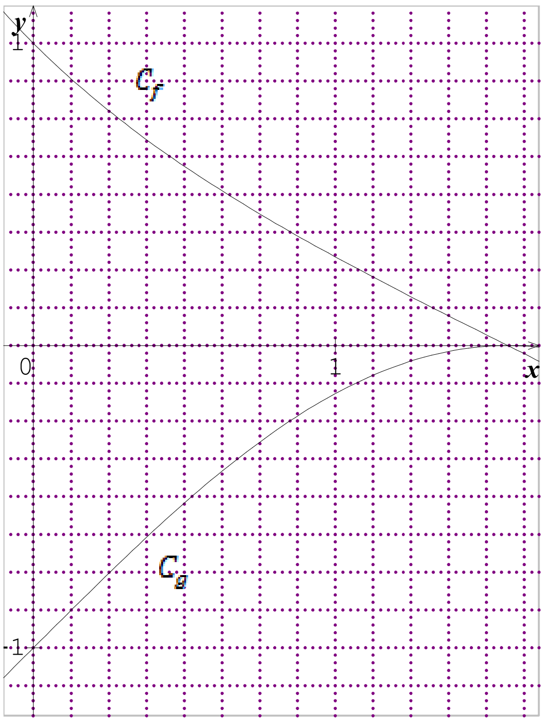
Exercice 3 non spé (5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \text{ et } g(x) = \sin x - 1 .$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Les courbes C_f et C_g sont données ci-dessous.



1. a. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{-1}{1+\sin x}$.

   b. Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

2. a. Justifier que $f(x)-g(x) = \frac{\cos x(\cos x+1)}{1+\sin x}$.

   b. En déduire le signe de $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle I.

c. Déterminer la position de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g sur I.

3. On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$.
   a. Calculer K.
   b. Justifier que $J = \ln 2$.
4. Soit D le domaine du plan limité par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire du domaine D en cm^2.

Exercice 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etude d'une fonction f. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note C_f la courbe de f dans $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
b. Calculer la dérivée f' de f.
c. En déduire les variations de f.

2. Etude d'une fonction g. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note C_g la courbe de g dans $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
(Après l'avoir justifiée on utilisera la relation $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$)
b. Calculer la dérivée g' de g.
c. Dresser le tableau de variations de g.

3. a. Montrer que les courbes C_f et C_g ont deux points communs dont on précisera les coordonnées.
b. Etudier les positions relatives de C_f et C_g.

4. On considère l'algorithme suivant qui doit permettre de trouver le premier entier naturel p dans l'intervalle $[5;+\infty[$ vérifiant $f(p) \le 10^{-n}$, où n est un entier naturel donné.

LIGNE	INSTRUCTION
1	Saisir un nombre entier naturel n
2	Affecter à x la valeur …………
3	Affecter à y la valeur $\frac{\ln x}{x}$
4	Tant que y…… 10^{-n} faire
5	Affecter à x la valeur x+1
6	Affecter à y la valeur ………
7	Afficher x
8	Fin algorithme

a. Recopier et compléter les lignes 2,4 et 6.
b. En choisissant n = 1, l'affichage en sortie est 36. Que signifie ce résultat pour la fonction f ?