**Exercice 1.** Soit le polynôme $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$ où z désigne un complexe.

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$(z^2+3)(z^2-6z+21)=z^4-6z^3+21z^2+3z^2-18z+63=z^4-6z^3+24z^2-18z+63=P(z)$.

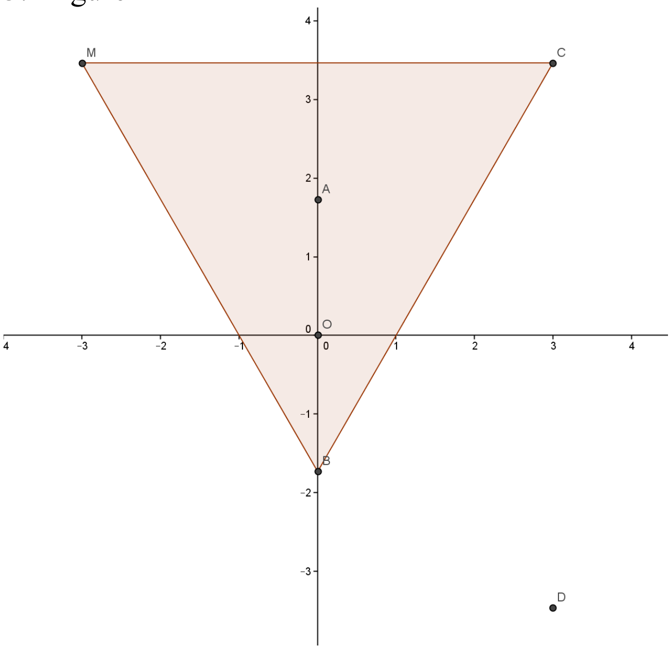
2. Pour tout z, on a :

$P(z)=0$

$\Leftrightarrow z^2+3=0$ ou $z^2-6z+21=0$ $(\Delta=-48=(4i\sqrt{3})^2)$

$\Leftrightarrow z=\pm i\sqrt{3}$ ou $z=\dfrac{6\pm 4i\sqrt{3}}{2}=3\pm 2i\sqrt{3}$

3. Figure




4. M le symétrique de D par rapport à O, donc $z_M=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$.

On a :

$$\frac{z_C-z_B}{z_M-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{-(1+i\sqrt{3})^2}{4}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On en déduit que le triangle BMC est équilatéral indirect, en effet :

$$\left|\frac{z_C-z_B}{z_M-z_B}\right|=\frac{BC}{BM}=1 \text{ et } (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_M-z_B}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

**Exercice 2.** 1. a. Loi de probabilité de X

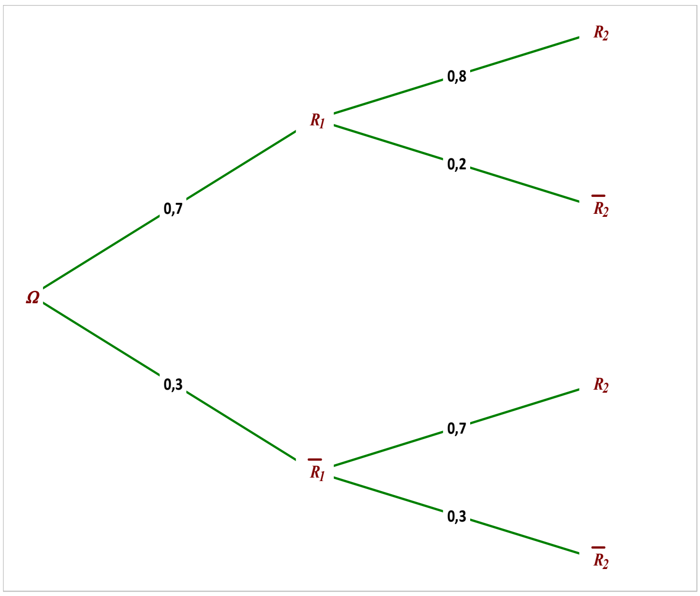
$X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$P(X=0)=P(\overline{R_1}\cap\overline{R_2})=0,3\times 0,3=0,09$

$P(X=1)=P(R_1\cap\overline{R_2})+P(\overline{R_1}\cap R_2)$

$\qquad\qquad =0,7\times 0,2+0,3\times 0,7=0,35$

$P(X=2)=P(R_1\cap R_2)=0,7\times 0,8=0,56$



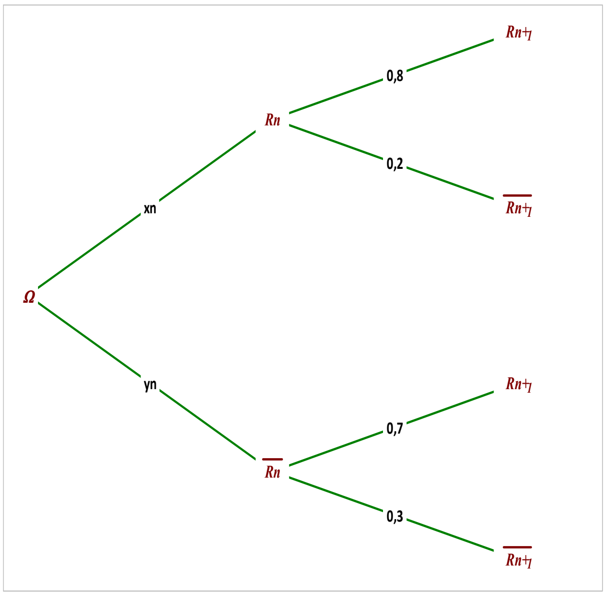
b. $E(X) = P(X=1) + 2P(X=2) = 1{,}47$

2. a. D'après l'énoncé, $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0{,}7$.

b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) + P(R_n \cap R_{n+1}) \\ &= P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) + P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) \\ &= (1-x_n) \times 0{,}7 + x_n \times 0{,}8 = 0{,}7 + 0{,}1x_n \end{aligned}$$




3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7 = 0{,}9x_n - 0{,}7 = 0{,}1(9x_n - 7) = 0{,}1u_n$.

La suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,1 et de 1[er] terme $u_1 = -0{,}7$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-0{,}7) \times (0{,}1)^{n-1}$.

$|0{,}1| < 1$, donc $\lim (0{,}1)^n = 0$, d'où $\lim x_n = \frac{7}{9}$

**Exercice 3 spé.** 1. Si a = 0, $an + b = b$, toutes les lettres seront codées par la même lettre, celle qui correspond au reste de la division euclidienne de b par 26.

2. Si a = 13. A correspond à 0 et C correspond à 2, or $13 \times 0 + b \equiv 13 \times 2 + b[26]$, donc A et C sont codés par la même lettre.

3. On prend maintenant a = 5 et b = 2.

a. Si $5n + 2 \equiv r[26]$ et $5p + 2 \equiv r[26]$, alors, par différence, $5(n-p) \equiv 0[26]$.

26 divise 5(n – p) et PGCD(26, 5) = 1, donc, par le théorème de Gauss, 26 divise $n - p$, soit $n \equiv p[26]$. Or n et p appartiennent à $\Omega$, donc n = p.

b. On a : $A \to 0 \to 2 \to C$, $M \to 12 \to 10 \to K$, $I \to 8 \to 16 \to Q$.

AMI est codé par CKQ.

4. a. E correspond à 4, donc on cherche $n \in \Omega$ tel que $5n + 2 \equiv 4[26]$, soit tel qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ avec $5n + 2 = 4 + 26y$, ou encore $5n - 2 = 26y$.

b. Soit l'équation $5x - 26y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

On a : $5 \times (-5) - 26(-1) = 1$. Une solution évidente est le couple (-10, -2).

On a :

$$5x - 26y = 2$$

$$\Leftrightarrow 5x - 26y = 5(-10) - 26(-2)$$

$$\Leftrightarrow 5(x+10) = 26(y+2) \qquad (1)$$

26 divise 5(x + 10) et PGCD( 5 , 26) = 1, donc, d'après le théorème de Gauss, 26 divise x +10 ; il existe donc $k \in Z$ tel que x + 10 = 26k. Il vient alors, en remplaçant dans (1), $5 \times 26k = 26(y+2)$, soit $y + 2 = 5k$.

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = -10 + 26k \\ y = -2 + 5k, k \in Z \end{cases}$$

Si $0 \le x \le 25$, alors k = 1, le couple solution est alors (16, 3).

c. Le décodage de E correspond à 16, soit la lettre Q.

**Exercice 3 non spé.** 1. a. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}.$$

b. Tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle I :

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

2. a. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) - g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} + (1-\sin x) = \frac{\cos x + 1 - \sin^2 x}{1+\sin x} = \frac{\cos x + \cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{\cos x(\cos x + 1)}{1+\sin x}.$$

b. Signe de $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle I :

| x | 0 | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| f(x)-g(x) | | + | 0 |

c. On en déduit que la courbe $C_f$ est au-dessus de la courbe $C_g$ sur I.

3. a. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)dx = [-\cos x - x]_0^{\pi/2} = 1 - \pi/2.$

b. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = [\ln(1+\sin x)]_0^{\pi/2} = \ln 2$.

4. D est le domaine du plan limité par les courbes $C_f$, $C_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Sur l'intervalle I, $f(x) - g(x) \geq 0$, donc $\text{aire}(D) = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))dx = J - K = \ln 2 + \pi/2 - 1$ en u.a., on multiplie par 16 pour avoir l'aire en $cm^2$.

**Exercice 4.** 1. a. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite du cours).

b. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

c. Variations de f :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $1/e$ | $\searrow$ | $0$ |

2. a. Pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) \times \ln x$, donc $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ ; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

b. Pour tout $x>0$, $g'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

c. Variations de g :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $2-\ln x$ | ‖ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4/e^2$ | ↘ | $0$ |

3. a. Pour tout $x>0$, on a :

$f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow \ln x=(\ln x)^2$

$\Leftrightarrow \ln x(1-\ln x)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=e$

Les points communs aux deux courbes sont A(1, 0) et B(e, 1/e)

b. Pour tout $x>0$, $f(x)-g(x)=\dfrac{\ln x(1-\ln x)}{x}$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $1-\ln x$ | ‖ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $f(x)-g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ce tableau permet de donner les positions relatives de $C_f$ et $C_g$.

4. a.

| LIGNE | INSTRUCTION |
|---|---|
| 1 | Saisir un nombre entier naturel n |
| 2 | Affecter à x la valeur 5 |
| 3 | Affecter à y la valeur $\dfrac{\ln x}{x}$ |
| 4 | Tant que y$>10^{-n}$ faire |
| 5 |     Affecter à x la valeur x+1 |
| 6 |     Affecter à y la valeur $\dfrac{\ln x}{x}$ |
| 7 | Afficher x |
| 8 | Fin algorithme |

b. En choisissant n = 1, l'affichage en sortie est 36.
Donc, pour tout $x\geq 36$, $f(x)\leq f(36)\leq 10^{-1}$.