Baccalauréat Blanc 2014
Mathématiques

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 2 (5 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K+1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Exercice 3 (5 points)

Un aviculteur élève trois types de poulets dans son exploitation.

- 20% de son exploitation est constitué de poulets « Label rouge » élevés en total liberté
- 40% de son exploitation est constitué de poulets « Fermier » élevés en semi-liberté
- 40% de son exploitation est constitué de poulets « Industriel » élevés en enclos fermé.

On constate que certains poulets sont atteints d'une maladie non transmissible à l'homme mais rendant le poulet impropre à la vente, la BRUNARDIDOSE.
Une étude statistique vétérinaire a établi que :

- 60% des poulets « Label rouge » sont atteints par la maladie.
- 50% des poulets « Fermiers » sont atteints par la maladie

On prélève un poulet au hasard sur l'exploitation et on note :
L : L'événement : " Le poulet est un poulet « Label rouge »"
F : L'événement : " Le poulet est un poulet « Fermier »"
I : L'événement : " Le poulet est un poulet « Industriel »"
M : L'événement : " Le poulet est un poulet atteint par la maladie "
1) Traduire les données de l'énoncé par un arbre pondéré.
2) Calculer les probabilités des événements $L \cap M$ et $F \cap M$.
3) On constate que 50% des poulets de l'exploitation sont atteints par la maladie.
 a) Déterminer la probabilité de l'événement $I \cap M$.
 b) En déduire que $P_I(M) = 0,45$.
4) Déterminer la probabilité qu'un poulet soit de type « Fermier » sachant qu'il est atteint par la maladie.
5) Les événements F et M sont-ils indépendants ?
6) Afin d'éradiquer cette maladie, l'aviculteur n'a pas d'autre solution que de vendre l'ensemble des 10 000 poulets que comporte son exploitation. Chaque poulet « Label rouge »non malade sera vendu 12€, chaque poulet « Fermier » non malade sera vendu 8€, chaque poulet « Industriel »non malade sera vendu 4€. Tous les poulets malades seront abattus sans être vendus.
Quel chiffre d'affaire total peut espérer faire cet aviculteur lors de cette vente ?

Exercice 4 spécialité (5 points)

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?